POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA: MATEMATYKA
DZIEDZINA NAUK: NAUKI ŚCISŁE I PRZYRODNICZE

Rozprawa doktorska

mgr Artur Słabuszewski

Zanurzenia ułamkowych przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych z miarą

Promotor
dr hab. Przemysław Górka

WARSZAWA 2023

Podziękowania

Przede wszystkim chciałbym złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi dr hab. Przemysławowi Górce za poświęcony czas, inspirujące rozmowy oraz ogromne pokłady cierpliwości i wyrozumiałości w trakcie naszej owocnej współpracy. Dziękuję również za wszystkie uwagi, bez których rozprawa nie nabrałaby obecnego kształtu.

Chciałbym podziękować także prof. Krzysztofowi Chełmińskiemu, dzięki któremu postanowiłem, że spróbuje swoich sił jako doktorant. Dziękuję również za wsparcie w trakcie realizacji doktoratu oraz za wszystkie życzliwe sugestie. Kieruję również wyrazy wdzięczności do Łukasza Błaszczyka, Antka Kijowskiego, Przemka Kosewskiego, Adama Kubicy, Karoliny Pawlak, Kasi Ryszewskiej oraz Marcina Zubilewicza za wszystko co dla mnie zrobili oraz za wszystkie interesujące dyskusje.

Wreszcie dziękuję mojej rodzinie za wsparcie oraz wiarę we mnie, bez których napisanie rozprawy doktorskiej byłoby niezwykle trudne. Specjalne podziękowania kieruję do mojego brata Michała za uważne przeczytanie pracy i zasugerowanie wielu poprawek edytorskich. Na koniec chciałbym podziękować także moim przyjaciołom: Adasiowi, Andrzejowi, Grzesiowi, Maćkowi, Mateuszowi oraz Rafałowi za wszystkie radosne chwile, które są bezcenną odskocznią od matematyki.

Streszczenie

W pracy doktorskiej dowodzimy, że zanurzenia Sobolewa dla przestrzeni Słobodeckiego zdefiniowanych na przestrzeni metrycznej z miarą są równoważne z regularnością Ahlforsa z dołu. Ponadto pokazujemy, że przestrzeń Słobodeckiego zdefiniowana na przestrzeni metrycznej z miarą regularną z dołu może być w sposób ciągły zanurzona w ułamkową przestrzeń Hajłasza-Sobolewa, która jest szczególnym przypadkiem przestrzeni Hajłasza-Triebla–Lizorkina. Oprócz tego, wskazujemy warunki konieczne i wystarczające na zwartość zanurzeń przestrzeni Słobodeckiego, ułamkowych przestrzeni Hajłasza-Sobolewa, przestrzeni Hajłasza-Triebla–Lizorkina oraz przestrzeni Hajłasza-Biesowa zdefiniowanych na przestrzeni metrycznej z miarą. Wiele wyników jest ilustrowanych poprzez różnorodne przykłady. Jako produkt uboczny naszych badań, otrzymaliśmy wzmocnione wersje narzędzi przydatnych w analizie takich jak charakteryzacja całkowicie ograniczonych przestrzeni metrycznych z miarą, uogólnienie twierdzenia Hansona czy odwrotne twierdzenie Łuzina.

Słowa kluczowe: *przestrzenie metryczne z miarą, przestrzenie Sobolewa, ułamkowe przestrzenie, regularność Ahlforsa, twierdzenie Rellicha–Kondraszowa, zanurzenia Sobolewa, zwartość zanurzeń, przestrzenie Hajłasza-Triebla–Lizorkina, przestrzenie Hajłasza-Biesowa.*

Abstract

We prove that Sobolev-type embeddings of Slobodeckij spaces defined on a metric measure space are equivalent to the Ahlfors lower regularity of the underlying measure. Moreover, we show that Slobodeckij space defined on the Ahlfors lower regular metric-measure spaces can be continuously embedded into a fractional Hajłasz-Sobolev space, which is a special case of Hajłasz-Triebel–Lizorkin space. We also establish necessary and sufficient conditions guaranteeing compactness of embeddings of the Slobodeckij, fractional Hajłasz-Sobolev spaces, Hajłasz-Triebel–Lizorkin spaces, and Hajłasz-Besov spaces defined on the metric-measure spaces. Many results are illustrated by some examples. As a byproduct of our research, we obtain reinforced versions of analytical tools usefull in analysis such as characterization of totally bounded metric-measure spaces, improved Hanson's theorem and reversed Lusin's theorem.

Keywords: *metric-measure spaces, Sobolev spaces, fractional spaces, Ahlfors regularity, Rellich–Kondrachov theorem, Sobolev embeddings, compact embedding, Hajłasz-Triebel–Lizorkin spaces, Hajłasz-Besov spaces.*

Spis treści

Wstęp

Niniejsza rozprawa poświęcona jest badaniu ciągłości i zwartości zanurzeń pomiędzy przestrzeniami Słobodeckiego, Hajłasza-Sobolewa, Hajłasza-Biesowa, Hajłasza-Triebla-Lizorkina, przestrzeniami Höldera oraz przestrzeniami Lebesgue'a, zdefiniowanych na przestrzeniach metrycznych z niezdegenerowaną miarą borelowską. Jeśli Ω jest mierzalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$, to przestrzeń Słobodeckiego $W^{\alpha,p}(\Omega)$ definiujemy jako klasę funkcji $u \in L^p(\Omega)$ takich, że

$$[u]_{W^{\alpha,p}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\, dxdy \right)^{1/p} < \infty.$$

Wielkość $[\,\cdot\,]_{W^{\alpha,p}(\Omega)}$ znana jest w literaturze jako półnorma Gagliardo, półnorma Słobodeckiego czy półnorma Aronszajna, gdyż to oni jako pierwsi zaczęli badać jej własności w latach 50 ubiegłego stulecia [11, 44, 99]. Od tamtej pory, teoria przestrzeni Słobodeckiego na podzbiorach $\mathbb{R}^n$ jest wciąż rozwijana i jej wyniki to:

- charakteryzacja ciągłych zanurzeń Sobolewa [30, 31, 35, 80, 102, 107],
- istnienie operatorów rozszerzania [31, 70, 102, 103, 107],
- zwartość zanurzeń [30, 31, 91],
- gęstość funkcji gładkich w $W^{\alpha,p}(\Omega)$ [12, 31, 32, 36, 37, 41],
- własności półnormy przy $\alpha \to 0^+$, $\alpha \to 1^-$ [22, 23, 24, 25, 33, 68, 87],
- nierówności typu Pólya-Segő [3, 81],
- ograniczoność funkcji maksymalnej [83]

oraz wiele winnych. Podobnie jak przestrzenie Sobolewa, przestrzenie Słobodeckiego odgrywają fundamentalną rolę w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Przy ich pomocy można scharakteryzować ślady funkcji z $W^{1,p}(\Omega)$, co pozwala na rozważanie równań różniczkowych sformułowanych w słabym sensie z ustalonym warunkiem brzegowym. Ponadto znajdują one zastosowania m.in. w analizie równań różniczkowych zadanych przez ułamkowy laplasjan, w teorii regularności równań Naviera-Stokesa [14, 28] czy też w zagadnieniach ze swobodnym brzegiem [94]. Więcej przykładów zastosowań teorii przestrzeni Słobodeckiego w analizie równań różniczkowych można znaleźć w [31].

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ. W latach 90 ubiegłego wieku Hajłasz pokazał w pracy [53], że jeśli $p \in (1, \infty]$, to $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oraz istnieje nieujemna funkcja $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i zbiór miary zero $E \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że nierówność

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y))$$

zachodzi dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Powyższa charakteryzacja przestrzeni Sobolewa nie odwołuje się do struktury różniczkowej przestrzeni euklidesowej, a jedynie do pojęć topologicznych i teoriomiarowych. Doprowadziło to do definicji przestrzeni Hajłasza-Sobolewa $M^{1,p}(X, d, \mu)$ (definicja 64), które uogólniają pojęcie przestrzeni Sobolewa na dowolną przestrzeń metryczną z miarą. Podejście zaproponowane przez Hajłasza nie jest jedynym sposobem w jaki można zdefiniować przestrzeń Sobolewa na przestrzeniach metrycznych. Shanmugalingam w [95] wprowadziła przy pomocy narzędzi z [66] tzw. przestrzenie Newtonowskie $N^{1,p}(X, d, \mu)$, a inni autorzy rozważali takie przestrzenie jak:

- przestrzenie Korevaara-Schoena $KS^{1,p}(X, d, \mu)$ [74],
- przestrzenie Cheegera $Ch^{1,p}(X, d, \mu)$ [27],
- przestrzenie Poincaré $P^{1,p}(X, d, \mu)$ [76],
- inne definicje przestrzeni Sobolewa, na przykład w [96, 98].

Jednakże w rozprawie skupimy się na podejściu zaproponowanym przez Hajłasza i nie będziemy odwoływać się do powyższych definicji przestrzeni Sobolewa.

Dla $\alpha \neq 1$ przestrzenie $M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ jako pierwszy rozważał Yang w pracy [106], które jak się okazuje są szczególnym przypadkiem przestrzeni Hajłasza-Triebla-Lizorkina $M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$ wprowadzonych w artykule [78] razem z przestrzeniami Hajłasza-Biesowa $N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$, jako uogólnienie przestrzeni Triebla-Lizorkina $F^{\alpha}_{p,q}$ i przestrzeni Biesowa $B^{\alpha}_{p,q}$ (uwaga 69). Od tamtej pory teoria przestrzeni $M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$, $M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$, $N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$ jest wciąż intensywnie rozwijana [4, 7, 8, 46, 47, 56, 57, 61, 62, 63, 72, 73].

Głównym celem rozprawy doktorskiej, wpisującym się w powyższy nurt analizy na przestrzeniach metrycznych, było rozwinięcie teorii przestrzeni Słobodeckiego zdefiniowanych na przestrzeniach metrycznych z miarą zadanych przez półnormę Gagliardo postaci

$$[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \left(\iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Przestrzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ zdefiniowane przy pomocy powyższej półnormy były rozważane m.in. w pracach [21, 35, 90, 92]. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że w literaturze częściej rozważaną definicją przestrzeni Słobodeckiego na przestrzaniach metrycznych z miarą są przestrzenie $\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ z półnormą Gagliardo daną przez

$$[u]_{\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \left(\iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha p}\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(y) d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Nietrudno pokazać, że jeśli μ jest s-regularna z dołu,[1] to $[u]^p_{\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \leq b[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$ oraz $[u]^p_{\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \geq b^{-1}[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$, gdy μ jest s-regularna z góry. Niewątpliwie przewagą powyższego podejścia jest brak parametru s, który ma za zadanie imitować wymiar przestrzeni. W praktyce przestrzenie $\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ bardzo trudno się analizuje bez zakładania warunku podwajania na μ, podczas gdy dla przestrzeni $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ można otrzymać interesujące wyniki, które są prawdziwe również dla miar niespełniających warunku podwajania. Czytelnika zainteresowanego teorią przestrzeni $\mathcal{W}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i jej zastosowaniami odsyłamy do [18, 19, 26, 38, 46, 77, 82, 86, 105].

Przejdziemy teraz do szczegółowego omówienia struktury rozprawy. Praca podzielona jest na trzy rozdziały. W pierwszym z nich wprowadzamy niezbędne pojęcia, definiujemy kluczowe obiekty i pokazujemy ich własności na potrzeby kolejnych rozdziałów. Na początku przypominamy elementarne pojęcia z topologii i teorii miary, a następnie omawiamy koncepcję regularności miary, warunków podwajania, własności przestrzeni całkowicie ograniczonych oraz pokazujemy charakteryzację zwartości w przestrzeniach L^p i L^0. Na koniec rozdziału omawiamy własności przestrzeni jednostajnie doskonałych, własności operatora mediany oraz definiujemy przestrzenie Słobodeckiego, Hajłasza-Sobolewa, Hajłasza-Biesowa oraz Hajłasza-Triebla-Lizorkina. Wyniki w tym rozdziale takie jak stwierdzenie 36, twierdzenie 48 czy twierdzenie 20 zgodnie z naszą wiedzą są nowe

[1] μ jest s-regularna z dołu, jeśli dla pewnego $b>0$, wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$ $\mu(B(z,r)) \geq \frac{1}{b} r^s$. Podobnie, jeśli dla pewnego $b>0$, wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$ $\mu(B(z,r)) \leq br^s$, to wtedy μ jest s-regularna z góry.

i pojawią się w pracy [6]. Ponadto podrozdział 1.6 pochodzi z artykułu [51] i przedstawiamy w nim narzędzia z pracy [4] niezwykle przydatne do badania warunków koniecznych na zachodzenie ciągłych zanurzeń Sobolewa, wzmocnione na przypadek przestrzeni lokalnie jednostajnie doskonałych.

Drugi rozdział poświęcony jest charakteryzacji ciągłych zanurzeń Sobolewa dla przestrzeni $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ oraz ciągłości zanurzeń w ułamkowe przestrzenie Hajłasza-Sobolewa. W pracy [35] zostało pokazane, że jeśli $\alpha p < s$, to s-regularność miary z dołu jest warunkiem wystarczającym na zachodzenie ciągłego zanurzenia

$$W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X,\mu), \tag{1}$$

gdzie $p^* = sp/(s-\alpha p)$. Jednym z celów doktoratu było pokazanie, że jeśli miara jest s-regularna z dołu oraz $\alpha p \geq s$, to ciągłe zanurzenia Sobolewa dla $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ również zachodzą, tzn. w przypadku $\alpha p > s$

$$W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu) \hookrightarrow C^{0,\alpha-s/p}(X,d) \tag{2}$$

oraz jeśli $\alpha p = s$, to istnieją stałe $C_1, C_2 \in (0,\infty)$ takie, że dla wszystkich $z \in X$, $R \in (0,1]$ i każdego niezerowego $u \in W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ zachodzi

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ⨍_{B(z,R)} \exp\left(\frac{|u(x)-c|}{C_1\|u\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x) \leq C_2. \tag{3}$$

Zanurzenie (2) udało się pokazać (twierdzenie 77) i jest to jeden z głównych wyników artykułu [52], natomiast (3) udało się pokazać dla $R \in (0,1/3]$ (twierdzenie 76 (ii)) oraz dla $R \in (0,1]$ przy dodatkowych założeniach na przestrzeń metryczną z miarą (twierdzenie 80 (i)). Dowód opiera się na metodzie Campanato dla przestrzeni metrycznych z miarą ([49]) zastosowanej do operatora mediany. Ponadto, korzystając z idei z prac [4, 108], pokazujemy, że dla s-regularnych z góry, lokalnie jednostajnie doskonałych przestrzeni metrycznych z miarą dolna s-regularność jest warunkiem koniecznym na zachodzenie zanurzeń (1), (2), (3). Ta część rozdziału pochodzi w całości z pracy [51]. Na koniec rozdziału drugiego pokazujemy twierdzenie 88, z którego w szczególności wynika, że dla miar s-regularnych z dołu zawsze zachodzi ciągłe zanurzenie

$$W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\alpha,p}(X,d,\mu). \tag{4}$$

Warto tutaj zaznaczyć, że przy pomocy powyższego zanurzenia i teorii zanurzeń Sobolewa dla przestrzeni Hajłasza-Sobolewa [4, 53, 55] można otrzymać zanurzenia (2), (3), jednakże na dzień pisania pracy [52] nie było dla nas jasne czy w ten sposób otrzymamy (2), (3) dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$. Obecnie można pokazać powyższe zanurzenia przy pomocy (4) oraz wyników z pracy [9] w pełnej ogólności, jednakże zaprezentowana przez nas metoda jest bezpośrednia i znalazła zastosowanie w teorii zanurzeń przestrzeni Orlicza-Słobodeckiego [13].

W ostatnim rozdziale, prezentujemy wyniki dotyczące zwartości zanurzeń przestrzeni $M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$, $N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$ oraz $W^{\alpha,p}_{s}(X, d, \mu)$. Pierwotnie interesował nas problem zwartości zanurzeń przestrzeni Słobodeckiego w $L^p(X, \mu)$. W bardzo wczesnej wersji pracy [52], dowodziliśmy twierdzenia 117 w przypadku $\theta = s$ bezpośrednio, korzystając z twierdzenia Vitalego (twierdzenie 46) oraz wersji twierdzenia Hansona (twierdzenie 48) pochodzącej z [15]. Później dopiero zauważyliśmy, że zanurzenie (4) zachodzi, co oznacza że dowodząc twierdzenia 117 można wykorzystać wyniki dotyczące zwartości zanurzenia

$$M^{\alpha,p}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \mu), \tag{5}$$

które było badane m.in. w [10, 19, 48, 55, 58, 65, 69, 71]. Jednakże zgodnie z naszą wiedzą, w literaturze nie było na tyle silnej wersji twierdzenia pokazującego zwartość zanurzenia (5) takiej, aby z (4) otrzymać twierdzenie 117 bez dodatkowych założeń na przestrzeń metryczną z miarą. Ku naszemu zdziwieniu okazało się, że nasz dowód twierdzenia 117 można zaadaptować do przestrzeni $M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ i otrzymać, że dla całkowicie ograniczonych[2] przestrzeni metrycznych z miarą (X, d, μ) zanurzenia (5) są zwarte dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$ (twierdzenie 4.1 w [52], które jest szczególnym przypadkiem wniosku 106). Postanowiliśmy więc kontynuować badania w tym kierunku i otrzymaliśmy wiele interesujących rezultatów dotyczących zwartości zanurzeń

$$M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X, \nu) \quad \text{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X, \nu), \tag{6}$$

gdzie $\alpha, p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$, $\tilde{p} \in [0, p]$ oraz ν jest miarą absolutnie ciągłą względem μ, określoną na tym samym σ-ciele. Na początku trzeciego rozdziału pokazujemy wyniki dotyczące zwartości zanurzeń (6) dla $\tilde{p} \in [0, p)$. Okazuje się (twierdzenie 94, twierdzenie 96, wniosek 97), że w tym przypadku warunkiem wystarczającym jest całkowalność pochodnej Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$. Ponadto w przypadku $\nu = \mu$ i $\tilde{p} \in (0, p)$ z twierdzenia 98 wynika, że zwartość zanurzeń (6) jest równoważna z $\mu(X) < \infty$.

[2]Warto zaznaczyć, że dzięki stwierdzeniu 36 z założeń twierdzenia 117 wynika, że (X, d) jest całkowicie ograniczona.

W podrozdziale 3.2 omawiamy przypadek $\tilde{p} = p$. Jednym z głównych wyników rozprawy jest twierdzenie 101, przy pomocy którego można badać zwartość zanurzeń (6) dla $\tilde{p} = p$, nawet gdy przestrzeń metryczna jest nieograniczona, a obie miary μ i ν są nieskończone. Dalsza część podrozdziału 3.2 poświęcona jest analizie warunków gwarantujących spełnienie założeń twierdzenia 101. Jednym z nich jest wprowadzona w pierwszym rozdziale całkowalność miary μ względem ν, tzn. zakładamy, że dla każdego $r \in (0, \infty)$

$$\int_X \frac{1}{\mu(B(x,r))}\, d\nu(x) < \infty.$$

Inne warunki, gwarantujące spełnienie założeń twierdzenia 101, przedstawiamy w uwagach 107 i 108.

W kolejnym podrozdziale zajmujemy się zwartością zanurzeń

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta}_{\tilde{p},r}(X,d,\nu), \quad M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\beta}_{\tilde{p},r}(X,d,\nu), \tag{7}$$

$$N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta}_{\tilde{p},r}(X,d,\nu), \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\beta}_{\tilde{p},r}(X,d,\nu) \tag{8}$$

dla $\alpha, p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$, $\tilde{p} \in (0, p]$, $\beta \in (0, \alpha)$ oraz $\nu << \mu$. Kluczowy okazuje się lemat 110, który orzeka, że ciągi ograniczone w $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)$ lub $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)$, zbieżne w $L^p(X,\nu)$ muszą być również zbieżne w $M^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$ i $N^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$. Stąd natychmiast otrzymujemy charakteryzację zwartych zanurzeń (7), (8) w przypadku $\mu = \nu$ i $\tilde{p} = p$ (twierdzenia 111 i 112) oraz wzmocnienie twierdzeń dotyczących zwartych zanurzeń z poprzednich podrozdziałów (wniosek 114, wniosek 115 i wniosek 116).

Na koniec rozdziału pokazujemy wyniki dotyczące zwartości zanurzeń dla przestrzeni Słobodeckiego, rezultaty dotyczące relacji pomiędzy zwartością zanurzeń (6) i warunkami podwajania oraz prezentujemy różnorodne przykłady.

Wyniki z ostatniego rozdziału w głównej mierze pochodzą z pracy [6], poza wynikami z podrozdziału 3.4, które pochodzą z [52] (za wyjątkiem stwierdzenia 119 i wniosku 120, które nie zostały opublikowane). Warto zaznaczyć, że w artykule [6] badamy zwartość zanurzeń (6), (7), (8), w przypadku gdy (X, d) jest przestrzenią quasi-metryczną, tzn. zamiast symetryczności i nierówności trójkąta zakładamy, że istnieją stałe $C, K \in [1, \infty)$ takie, że dla wszystkich $x, y, z \in X$

$$d(x,y) \le C d(y,x) \quad \text{oraz} \quad d(x,y) \le K(d(x,z) + d(z,y)).$$

Jednakże wyniki z ostatniego rozdziału są nowe nawet w kontekście przestrzeni metrycznych, więc w celu uspójnienia rozprawy ograniczyliśmy się do analizy na przestrzeniach metrycznych.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Elementarne pojęcia z teorii miary i topologii

Definicja 1 (Przestrzeń topologiczna)**.** Załóżmy, że dany jest zbiór X oraz rodzina jego podzbiorów τ. Ponadto załóżmy, że dla każdej podrodziny $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau$ następujące warunki są spełnione:

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$;

(iii) jeśli $\#I < \infty$, to $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

Wówczas τ nazywamy topologią na X, a parę (X, τ) przestrzenią topologiczną. Elementy rodziny τ nazywamy zbiorami otwartymi, a ich dopełnienia zbiorami domkniętymi.

Definicja 2 (Przestrzeń metryczna)**.** Niech dany będzie zbiór X oraz funkcja $d : X \times X \to [0, \infty)$. Załóżmy, że dla wszystkich $x, y, z \in X$ spełnione są następujące warunki:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Wówczas parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną, a funkcję d metryką. Własności $(i), (ii), (iii)$ nazywamy odpowiednio niezdegenerowaniem, symetrycznością i nierównością trójkąta.

Jeśli $E, F \subseteq X$ są niepustymi zbiorami, to odległość pomiędzy E i F definiujemy wzorem

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y).$$

Ponadto jeśli $E \subseteq X$ oraz $x \in X$, to skrótowo piszemy $\operatorname{dist}(x, E) = \operatorname{dist}(\{x\}, E)$. Z nierówności trójkąta łatwo wynika, że dla każdego zbioru E, $\emptyset \neq E \subseteq X$ oraz $x, y \in X$ zachodzi

$$\operatorname{dist}(x, E) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, E) \tag{1.1.1}$$

oraz dla każdego $x \in X$ i niepustych zbiorów $E, F \subseteq X$ mamy

$$\operatorname{dist}(E, F) \leq \operatorname{dist}(x, E) + \operatorname{dist}(x, F). \tag{1.1.2}$$

Definicja 3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy $x \in X$ i $r > 0$. Kulą o środku w x i promieniu r nazwiemy zbiór

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Podzbiór $U \subseteq X$ nazwiemy otwartym w (X, d), jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ taki, że $B(x, r) \subseteq U$. Łatwo można sprawdzić, że rodzina

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ jest otwarty w } (X, d)\}$$

zadaje na X topologię. Średnicą przestrzeni metrycznej (X, d) nazwiemy wielkość

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x, y \in X} d(x, y).$$

Uwaga 4. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $x \in X$ i $r > \operatorname{diam} X$, to $B(x, r) = X$.*

Dowód. Niech $y \notin B(x, r)$. To oznacza, że $d(x, y) \geq r > \operatorname{diam} X \geq d(x, y)$. □

Przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni metrycznej (X, d) oznaczamy przez $C(X, d)$. Jest to przestrzeń Banacha z normą

$$\|u\|_{C(X,d)} = \sup_{x \in X} |u(x)|.$$

Definicja 5 (Przestrzenie Höldera)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\alpha \in (0, \infty)$. Powiemy, że $u : X \to \mathbb{R}$ jest α-Hölderowsko ciągła, jeśli istnieje stała H_α taka, że dla wszystkich $x, y \in X$

$$|u(x) - u(y)| \leq H_\alpha \, d(x, y)^\alpha.$$

Przestrzeń ograniczonych funkcji α-Hölderowsko ciągłych oznaczamy przez $C^{0,\alpha}(X,d)$ i zadajemy na niej normę

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X,d)} = \|u\|_{C(X,d)} + [u]_{C^{0,\alpha}(X,d)},$$

gdzie

$$[u]_{C^{0,\alpha}(X,d)} = \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Definicja 6 (σ-ciało)**.** Niech X będzie zbiorem oraz $\mathfrak{M}$ będzie pewną rodziną jego podzbiorów. Powiemy, że $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem, jeśli spełnione są następujące warunki:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{M}$;

(ii) jeśli $A \in \mathfrak{M}$, to również $X \setminus A \in \mathfrak{M}$;

(iii) jeśli $A_n \in \mathfrak{M}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to wówczas $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

Parę $(X, \mathfrak{M})$ zazwyczaj nazywamy przestrzenią mierzalną, a elementy $\mathfrak{M}$ zbiorami mierzalnymi. Najprostszymi przykładami σ-ciał jest zbiór wszystkich podzbiorów 2^X danego zbioru oraz σ-ciało trywialne, tzn. rodzina składająca się tylko z X i zbioru pustego. Natomiast jeśli mamy wyróżnioną pewną podrodzinę, niekoniecznie będącą σ-ciałem, możemy rozważać najmniejsze σ-ciało zawierające tę rodzinę.

Definicja 7 (σ-ciało generowane przez rodzinę, σ-ciało zbiorów borelowskich)**.** Niech X będzie zbiorem oraz $A \subseteq 2^X$. Wówczas σ-ciałem generowanym przez rodzinę A nazwiemy σ-ciało

$$\sigma(A) = \bigcap \left\{ \mathfrak{M} \subseteq 2^X : A \subseteq \mathfrak{M} \text{ i } \mathfrak{M} \text{ jest } \sigma\text{-ciałem} \right\}.$$

Jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną, to $\sigma(\tau)$ nazywamy σ-ciałem zbiorów borelowskich i oznaczamy jako $\mathcal{B}(X,\tau)$ lub skrótowo $\mathcal{B}(X)$.

Lemat 8. *Jeśli* (X,d) *jest ośrodkową przestrzenią metryczną, to*

$$\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X).$$

Dowód. Natychmiast wynika z [20, lemat 6.4.2]. □

Definicja 9 (Miara, przestrzeń z miarą)**.** Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ nazywamy miarą, jeśli spełnione są następujące warunki *(i)* $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) jeśli zbiory $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{M}$ są parami rozłączne, to $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Wówczas trójkę $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą. W celu uproszczenia notacji, odwołując się do definicji przestrzeni z miarą, rozważamy tylko parę (X, μ), gdyż σ-ciało $\mathfrak{M}$ wynika z kontekstu jako dziedzina odwzorowania μ.

Definicja 10 (Miara borelowska)**.** Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, a τ topologią na X. Powiemy, że μ jest borelowska, jeśli $\mathcal{B}(X, \tau) \subseteq \mathfrak{M}$.

Definicja 11 (Mierzalność)**.** Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $u : X \to [-\infty, \infty]$ nazwiemy mierzalną, jeśli dla każdego $c \in \mathbb{R}$

$$u^{-1}([-\infty, c]) \in \mathfrak{M}.$$

Definicja 12 (Przestrzenie Lebesgue'a)**.** Niech (X, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dla $p \in (0, \infty]$ rozważamy zbiór

$$\widetilde{L}^p(X, \mu) = \{u : X \to [-\infty, \infty] : u \text{ jest mierzalna oraz } \|u\|_{L^p(X,\mu)} < \infty\},$$

gdzie

$$\|u\|_{L^p(X,\mu)} = \begin{cases} \Big(\int\limits_X |u(x)|^p \, d\mu(x)\Big)^{1/p}, & \text{gdy } p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |u(x)|, & \text{gdy } p = \infty. \end{cases}$$

Następnie przestrzeń $L^p(X, \mu)$ definiujemy jako przestrzeń ilorazową

$$\widetilde{L}^p(X, \mu)/_\sim,$$

gdzie $\sim$ jest relacją równości μ-prawie wszędzie. Dla $p \in [1, \infty]$ przestrzeń $L^p(X, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$ jest przestrzenią Banacha, natomiast dla $p \in (0, 1)$ jest to przestrzeń quasi-Banacha.

Definicja 13 (Przestrzeń metryczna z miarą)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a μ będzie miarą borelowską na X. Ponadto załóżmy, że μ jest niezdegenerowana, tzn. dla każdego $x \in X$ i wszystkich $r \in (0, \infty)$

$$0 < \mu(B(x, r)) < \infty.$$

Wówczas trójkę (X, d, μ) nazywamy przestrzenią metryczną z miarą.

Dla wygody czytelnika i na potrzeby rozdziału 3, w którym będziemy pracować z dwiema miarami określonymi na tym samym σ-ciele, postaramy się trzymać konwencji, w której niezdegenerowaną miarę oznaczamy przez μ. Natomiast gdy w naszych rozważaniach miara nie musi być niezdegenerowana, to będziemy ją oznaczać przez ν. Z poniższego stwierdzenia wynika, że każda przestrzeń metryczna z miarą jest ośrodkowa.

Stwierdzenie 14. *[50, twierdzenie 2] Przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na niej niezdegenerowana miara borelowska.*

1.2 Regularność miary

Przypomnimy teraz dwie odmienne koncepcje regularności miary.

1.2.1 Regularność Ahlforsa

Definicja 15. Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech $s \in (0, \infty)$. Powiemy, że (X, d, μ) jest s-regularna z góry, jeśli istnieje stała $b \in (0, \infty)$ taka, że dla wszystkich $x \in X$ oraz $r \in (0, 1]$

$$\mu(B(x, r)) \leq br^s. \tag{1.2.1}$$

Analogicznie, jeśli dla pewnej stałej $b \in (0, \infty)$, wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, 1]$ mamy

$$\mu(B(x, r)) \geq \frac{1}{b} r^s, \tag{1.2.2}$$

to powiemy, że (X, d, μ) jest s-regularna z dołu. Natomiast jeśli dla pewnego $b \in (0, \infty)$, wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, 1]$ obie te nierówności są spełnione, to powiemy, że (X, d, μ) jest s-regularna.

Gdy będziemy odwoływać się do powyższych definicji zazwyczaj będziemy skrótowo mówić o s-regularności samej miary.

1.2.2 Borelowska regularność

Definicja 16. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną oraz niech ν będzie borelowską miarą określoną na σ-ciele $\mathfrak{M}$. Powiemy, że ν jest borelowsko regularna, jeśli dla każdego zbioru mierzalnego $E \in \mathfrak{M}$

$$\nu(E) = \inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{B}(X) \text{ oraz } E \subseteq B\}.$$

Łatwo uzasadnić, że ν jest borelowsko regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $E \in \mathfrak{M}$ istnieje zbiór borelowski B taki, że $E \subseteq B$ oraz

$$\nu(E) = \nu(B).$$

Definicja 17. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną z miarą borelowską ν. Powiemy, że ν jest zewnętrznie regularna, jeśli dla każdego zbioru mierzalnego E

$$\nu(E) = \inf\{\, \nu(U) : E \subseteq U \text{ i } U \text{ jest otwarty}\}.$$

Natomiast jeśli dla każdego zbioru mierzalnego E zachodzi

$$\nu(E) = \sup\{\, \nu(C) : C \subseteq E \text{ i } C \text{ jest domknięty}\},$$

to powiemy, że ν jest wewnętrznie regularna.

Stwierdzenie 18. *[40, twierdzenie 2.2.2] Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną z borelowsko regularną miarą ν. Załóżmy, że X jest przeliczalną sumą zbiorów otwartych o mierze skończonej. Wówczas ν jest zewnętrznie i wewnętrznie regularna.*

1.2.3 Twierdzenie Łuzina

Poniższa wersja twierdzenia Łuzina będzie nam potrzebna do pokazania, że przy założeniu borelowskiej regularności miary twierdzenie 48 staje się równoważnością.

Twierdzenie 19 (Łuzin)**.** *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną i niech ν będzie skończoną, zewnętrznie i wewnętrznie regularną miarą. Dla każdej mierzalnej, skończonej ν-prawie wszędzie funkcji u i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięty zbiór G_ε taki, że:*

(i) $u|_{G_\varepsilon}$ *jest ciągła;*

(ii) $\nu(X \setminus G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Na ogół w literaturze ([40, twierdzenie 2.3.5], [42, twierdzenie 7.10] lub [39, twierdzenie 1.14]) zakłada się, że (X, τ) jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, a ν jest skończoną miarą Radona. Wówczas można wymagać aby zbiór G_ε był zwarty, jednakże nam nie będzie to potrzebne.

Dowód. Niech $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$E_n = u^{-1}(V_n),\ E_\infty = u^{-1}(\{-\infty, \infty\}).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia o regularności, możemy znaleźć otwarte zbiory U_n i domknięte zbiory C_n takie, że $C_n \subseteq E_n \subseteq U_n$ oraz

$$\nu(U_n \setminus C_n) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Ponieważ $\nu(E_\infty) = 0$, to istnieje zbiór otwarty U_∞ taki, że $E_\infty \subseteq U_\infty$ oraz $\nu(U_\infty \setminus E_\infty) < \varepsilon/2$. Definiujemy zbiory

$$F_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(U_n \setminus C_n\Big) \cup U_\infty \ \text{ oraz } \ G_\varepsilon = X \setminus F_\varepsilon.$$

Zbiór F_ε jest otwarty oraz $\nu(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Niech $g = u|_{G_\varepsilon}$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$g^{-1}(V_n) = E_n \cap G_\varepsilon = U_n \cap G_\varepsilon.$$

W takim razie zbiór $g^{-1}(V_n)$ jest otwarty w topologii indukowanej na G_ε. Ponieważ zbiory $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ są bazą topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$, kończy to dowód ciągłości g. □

Okazuje się, że zachodzenie twierdzenia Łuzina implikuje borelowską regularność miary. Dokładniejszą analizę związku pomiędzy regularnością miary i zachodzeniem pewnych wersji twierdzenia Łuzina ukaże się w pracy [5].

Twierdzenie 20. *Niech (X, τ, ν) będzie przestrzenią topologiczną ze skończoną miarą borelowską ν. Zakładamy, że dla każdej mierzalnej i skończonej ν-prawie wszędzie funkcji u i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór borelowski B_ε taki, że:*

(i) $u|_{B_\varepsilon}$ *jest ciągła;*

(ii) $\nu(X \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$.

Wówczas ν jest borelowsko regularna.

Dowód. Niech A będzie mierzalnym podzbiorem X. Z założeń wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór borelowski B_n taki, że $\nu(X \setminus B_n) < 1/n$ oraz funkcja $u_n := \chi_A|_{B_n}$ jest ciągła. Stąd wynika, że $u_n^{-1}(\{1\}) = A \cap B_n$ jest domknięty w topologi $\tau|_{B_n}$. W takim razie możemy znaleźć zbiór C_n, który jest domknięty w τ, taki że $A \cap B_n = C_n \cap B_n$. Ponieważ

$$A = \Big(A \cap B_n\Big) \cup \Big(A \setminus B_n\Big) \subseteq \Big(C_n \cap B_n\Big) \cup \Big(X \setminus B_n\Big) \in \mathcal{B}(X) \tag{1.2.3}$$

oraz

$$\nu(A) \leq \nu\Big(\big(C_n \cap B_n\big) \cup \big(X \setminus B_n\big)\Big) \leq \nu(A) + 1/n,$$

więc zbiór

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(C_n \cap B_n\big) \cup \big(X \setminus B_n\big)$$

jest zbiorem borelowskim, zawiera zbiór A oraz spełnia $\nu(A) = \nu(B)$. $\square$

1.3 Warunki podwajania

Przypomnimy teraz bardzo dobrze znane w literaturze warunki podwajania, przy założeniu których wiele wyników z klasycznej analizy harmonicznej daje się uogólnić na przypadek przestrzeni metrycznych wyposażonych w miarę borelowską.

Definicja 21. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz μ niech będzie miarą borelowską. Powiemy, że μ jest podwajająca, jeśli istnieje stała $C_d \in (0, \infty)$ taka, że dla wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, \infty)$ mamy

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C_d\, \mu(B(x, r)) < \infty.$$

Definicja 22. Powiemy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest geometrycznie podwajająca, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, \infty)$ możemy znaleźć punkty $\{x_i\}_{i=1}^{M} \subseteq X$ takie, że

$$B(x, 2r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, r).$$

Okazuję się, że dla przestrzeni metrycznych wyposażonych w miarę podwajającą musi zachodzić zachodzić warunek geometrycznego podwajania. Zostało to zauważone w pracy [29].

Twierdzenie 23 (Coiffman-Weiss)**.** *Każda przestrzeń metryczna z podwajającą miarą jest geometrycznie podwajająca.*

Z drugiej strony jeśli zupełna przestrzeń metryczna jest geometrycznie podwajająca, to musi na niej istnieć miara podwajająca. Zostało to pokazane w pracy [104] dla zwartych, geometrycznie podwajających przestrzeni metrycznych . Później w artykule [84] założenie o zwartości zostało osłabione do zupełności.

Twierdzenie 24 (Volberg-Konyagin-Lukkainen-Saksmann)**.** *Niech (X,d) będzie zupełną, geometrycznie podwajającą przestrzenią metryczną. Wtedy na (X,d) istnieje miara podwajająca.*

Warto zaznaczyć, że w powyższym twierdzeniu założenie o zupełności przestrzeni metrycznej jest istotne. $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ jest geometrycznie podwajającą przestrzenią metryczną i gdyby istniała na niej miara podwajająca, to na mocy [85, twierdzenie 1], każdy punkt dodatniej miary byłby punktem izolowanym. Ponieważ żaden punkt w $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ nie jest izolowany, więc miara każdego punktu musi być równa zero. Zatem z przeliczalności $\mathbb{Q}$ miara całej przestrzeni również będzie równa zero.

Dla każdego n naturalnego $\mathbb{R}^n$ jest geometrycznie podwajająca, więc dowolny zwarty podzbiór $E \subseteq \mathbb{R}^n$ również będzie geometrycznie podwajający. Poniższy przykład pokazuje, że istnieją zwarte przestrzenie metryczne, które nie są geometrycznie podwajające.

Przykład 25 (Kostka Hilberta)**.** Oznaczmy $\mathcal{H} = \{a \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \forall m \in \mathbb{N} \quad a(m) \leq 1/m\}$. Wówczas $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})})$ jest zwartą przestrzenią metryczną, która nie jest geometrycznie podwajająca.

Dowód. Zwartość kostki Hilberta jest dobrze znana ([67, str. 190: ćwiczenie 6]), więc pokażemy tylko, że $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})})$ nie jest geometrycznie podwajająca. Przypuśćmy, że $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})})$ jest geometrycznie podwajająca. Wówczas istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć punkty $\{x_i\}_{i=1}^M \subseteq \mathcal{H}$ spełniające

$$B(0, 4\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, \varepsilon). \tag{1.3.1}$$

Ustalmy $\varepsilon \in (0, 1/(4M))$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$2\varepsilon \leq 1/N < 4\varepsilon. \tag{1.3.2}$$

W szczególności to oznacza, że $N > M$. Dla $n = 1, 2, \ldots, N$ definiujemy

$$u_n(m) = \begin{cases} 1/N, & \text{jeśli } m = n, \\ 0, & \text{jeśli } m \neq n. \end{cases}$$

Wówczas $u_n \in \mathcal{H}$ oraz z nierówności (1.3.2) wynika, że

$$u_n \in B(0, 4\varepsilon) \setminus B(0, 2\varepsilon),$$

więc z (1.3.1) mamy

$$u_n \in \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, \varepsilon).$$

Dla dowolnego $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ zdefiniujmy $j(n) \in \{1, \dots, M\}$ wzorem

$$j(n) = \min\{i \in \{1, \dots, M\} : u_n \in B(x_i, \varepsilon)\}.$$

Stąd

$$x_{j(n)} \in B(u_n, \varepsilon)$$

oraz dla $n \neq k$, mamy

$$\|u_n - u_k\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sqrt{2}/N > 1/N \geq 2\varepsilon,$$

skąd wynika, że kule $\{B(u_n, \varepsilon)\}_{n=1}^{N}$ są parami rozłączne. To oznacza, że odwzorowanie $j : \{1, 2, \dots, N\} \to \{1, \dots, M\}$ jest różnowartościowe. W takim razie $N \leq M$, więc doprowadziliśmy do sprzeczności, ponieważ $N > M$. □

Poniższy lemat pokazuje, że w przypadku miar podwajających, nie ma znaczenia czy mówimy o mierze skończonej czy przestrzeni ograniczonej.

Lemat 26. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajającą. Wówczas $\mu(X) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{diam} X < \infty$.*

Dowód. Jeśli $\operatorname{diam} X < \infty$, to natychmiast $\mu(X) < \infty$, gdyż $X = B(x_0, 2 \operatorname{diam} X)$ dla dowolnego $x_0 \in X$. Załóżmy, że $\mu(X) < \infty$ i przypuśćmy, że $\operatorname{diam} X = \infty$. Dla ustalonego $x_0 \in X$ możemy znaleźć ciąg $x_n \in X$ taki, że $r_n := d(x_n, x_0) \to \infty$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mu(B(x_0, r_n)) &\leq \mu(B(x_n, 2r_n)) \leq C_d^2 \mu(B(x_n, r_n/2)) \\ &\leq C_d^2 \mu(X \backslash B(x_0, r_n/2)) = C_d^2 \Big(\mu(X) - \mu(B(x_0, r_n/2)) \Big).\end{aligned}$$

Po przejściu granicznym otrzymujemy

$$\mu(X) \leq 0,$$

co oznacza, że $\mu(X) = 0$. Ponieważ zakładamy, że miara każdej kuli jest dodatnia, więc stąd wynika, że $X = \emptyset$. □

1.3.1 Warunki δ-podwajania i podwajania w nieskończoności

Wprowadzamy teraz dwa nowe warunki przypominające warunek podwajania. Jak się później okaże, będą one uniemożliwiały zachodzenie zwartych zanurzeń rozważanych w podrozdziale 3.2.

Definicja 27. Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech $\delta \in (0, \infty)$. Powiemy, że μ jest δ-podwajająca, jeśli istnieje liczba $C_\delta \in (0, \infty)$ taka, że dla wszystkich $x \in X$

$$\mu(B(x, 2\delta)) \leq C_\delta \mu(B(x, \delta)). \tag{1.3.3}$$

Definicja 28. Niech (X, d, μ) będzie nieograniczoną przestrzenią metryczną z miarą skończoną. Powiemy, że μ jest podwajająca w nieskończoności, jeśli istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{\mu(X \setminus B(x_0, R))}{\mu(X \setminus B(x_0, 2R))} < \infty. \tag{1.3.4}$$

Powyższe definicje oczywiście nie są równoważne, ponieważ w przypadku warunku δ-podwajania nie wymagamy od przestrzeni metrycznej, aby była nieograniczona, ani żeby miała skończoną miarę. Jednakże nawet w przypadku skończonych miar zdefiniowanych na nieograniczonych przestrzeniach metrycznych powyższe warunki się nie implikują. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykład 29. Rozważmy $([0, \infty), d, \mu)$, gdzie d jest odległością euklidesową a μ jest miarą zadaną przez $d\mu = f(x)dx$ dla $f \equiv 1$ na $[0, 1)$ oraz

$$f(x) = a_k \exp(2^k x - 2 \cdot 4^k), \quad \text{jeśli} \quad x \in [2^k, 2^{k+1})$$

dla $k \geq 0$, gdzie $a_k = 1/(1 - \exp(-4^k))$. Wówczas μ jest podwajająca w nieskończoności, ale nie jest δ-podwajająca dla żadnej $\delta \in (0, \infty)$.

Dowód. Dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mu\Big([2^l, 2^{l+1})\Big) = a_l \int\limits_{(2^l, 2^{l+1})} \exp(2^l x - 2 \cdot 4^l)\, dx = a_l\, 2^{-l} \int\limits_{(-4^l, 0)} e^y\, dy = 2^{-l}.$$

Niech $N \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $2^k \leq N < 2^{k+1}$. Wówczas

$$\frac{\mu(X \setminus B(0, N))}{\mu(X \setminus B(0, 2N))} \leq \frac{\mu(X \setminus B(0, 2^k))}{\mu(X \setminus B(0, 2^{k+2}))} = \frac{\sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l}}{\sum_{l=k+2}^{\infty} 2^{-l}} = 4$$

i stąd wynika, że μ jest podwajająca w nieskończoności.

Pokażemy teraz, że μ nie jest δ-podwajająca dla żadnej $\delta \in (0,\infty)$. Niech $\delta \in (0,\infty)$ i ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$, które spełnia $\delta < 2^{k-2}$. Ponieważ $2^k + 2\delta < \frac{3}{2}2^k$, więc mamy

$$\mu(B(2^k+\delta,\delta)) \le a_k \int\limits_{(2^k,\frac{3}{2}2^k)} \exp(2^k x - 2\cdot 4^k)dx = a_k 2^{-k}\Big(\exp\Big(-\frac{1}{2}4^k\Big) - \exp\Big(-4^k\Big)\Big).$$

Z drugiej strony zachodzi

$$\begin{aligned}\mu(B(2^k+\delta,2\delta)) \ge \mu((2^k-\delta,2^k)) &= a_{k-1} \int\limits_{(2^k-\delta,2^k)} \exp(2^{k-1}x - 2\cdot 4^{k-1})dx \\ &= 2^{-k+1}a_{k-1}(1-\exp(-\delta 2^{k-1})).\end{aligned}$$

Łącząc powyższe nierówności, otrzymujemy, że

$$\frac{\mu(B(2^k+\delta,2\delta))}{\mu(B(2^k+\delta,\delta))} \ge \frac{2a_{k-1}}{a_k}\frac{1-\exp(-\delta 2^{k-1})}{\exp\Big(-\frac{1}{2}4^k\Big)-\exp\Big(-4^k\Big)} \to \infty$$

przy $k \to \infty$. Stąd wynika, że μ nie jest δ-podwajająca. $\square$

Przykład 30. Rozważmy $(\mathbb{N},d,\mu)$, gdzie d jest metryką euklidesową oraz $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $(\mathbb{N},d,\mu)$ jest δ-podwajająca dla wszystkich $\delta \in (0,\infty)$, ale nie jest podwajająca w nieskończoności.

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że dla każdej $\delta \in (0,\infty)$ spełniony jest warunek δ-podwajania. Jeśli $\delta \in (0,1]$, to dla $n \ge 1$

$$\frac{\mu(B(n,2\delta))}{\mu(B(n,\delta))} \le \frac{2^{-n+1}+2^{-n}+2^{-n-1}}{2^{-n}} = 7/2.$$

Zatem możemy założyć, że $\delta \in (1,\infty)$. Jeśli $\delta \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to wówczas

$$\frac{\mu(B(n,2\delta))}{\mu(B(n,\delta))} \le \frac{\sum\limits_{k=n-2\delta+1}^{n+2\delta-1} 2^{-k}}{\sum\limits_{k=n}^{n+\delta-1} 2^{-k}} = \frac{2^{-n+2\delta-1}\sum\limits_{k=0}^{4\delta-2} 2^{-k}}{2^{-n}\sum\limits_{k=0}^{\delta-1} 2^{-k}} = 2^{2\delta-1}\frac{1-2^{-4\delta+1}}{1-2^{-\delta}}.$$

Natomiast jeśli $\delta \notin \mathbb{N}$, to $\delta \in (m,m+1)$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Wówczas dla $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B(n,2\delta))}{\mu(B(n,\delta))} &\le \frac{\mu(B(n,2(m+1)))}{\mu(B(n,m))} = \frac{\mu(B(n,2(m+1)))}{\mu(B(n,m+1))}\frac{\mu(B(n,m+1))}{\mu(B(n,m))} \\ &\le \frac{\mu(B(n,2(m+1)))}{\mu(B(n,m+1))}\frac{\mu(B(n,2m))}{\mu(B(n,m))} \le C_{m+1}C_m,\end{aligned}$$

gdzie C_m i C_{m+1} są stałymi z nierówności (1.3.3) odpowiednio dla $\delta = m$ oraz $\delta = m+1$.

Zostało nam do pokazania, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{N}$ warunek (1.3.4) nie jest spełniony. Ustalmy więc $x_0 \in \mathbb{N}$ i niech $R > x_0$. Wówczas

$$\frac{\mu(X \setminus B(x_0, R))}{\mu(X \setminus B(x_0, 2R))} = \frac{\sum\limits_{k=\lceil x_0+R \rceil}^{\infty} 2^{-k}}{\sum\limits_{k=\lceil x_0+2R \rceil}^{\infty} 2^{-k}} = 2^{\lceil x_0+2R \rceil - \lceil x_0+R \rceil} = 2^{\lceil 2R \rceil - \lceil R \rceil},$$

gdzie przez $\lceil x \rceil$ oznaczamy najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż x. Przechodząc z $R \to \infty$, otrzymujemy

$$\frac{\mu(X \setminus B(x_0, R))}{\mu(X \setminus B(x_0, 2R))} \to \infty.$$

□

1.4 Własności przestrzeni całkowicie ograniczonych

1.4.1 Zbiory δ-rozdzielone

Definicja 31. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $\delta \in (0, \infty)$. Zbiór $A \subseteq X$ nazwiemy δ-rozdzielonym, jeśli dla wszystkich $x, y \in A$ takich, że $x \neq y$ mamy $d(x, y) \geq \delta$. Ponadto powiemy, że A jest maksymalnym zbiorem δ-rozdzielonym, jeśli dla każdego zbioru δ-rozdzielonego $\tilde{A}$ zachodzi implikacja

$$A \subseteq \tilde{A} \implies A = \tilde{A}.$$

Uwaga 32. *Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że dla każdej przestrzeni metrycznej (X, d) i każdej $\delta \in (0, \infty)$ istnieje maksymalny zbiór δ-rozdzielony.*

Dokładniejszą analizę związku pomiędzy istnieniem zbiorów δ-rozdzielonych i zachodzeniem pewnych wersji aksjomatu wyboru można znaleźć w pracy [34].

Uwaga 33. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz A jest zbiorem δ-rozdzielonym, to rodzina kul $\{B(a, \delta/2)\}_{a \in A}$ jest parami rozłączna. Ponadto jeśli A jest maksymalnym zbiorem δ-rozdzielonym, to*

$$X = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta).$$

Stwierdzenie 34. *Przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\delta \in (0, \infty)$ dowolny zbiór δ-rozdzielony jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. „$\Leftarrow$” Niech A_n oznacza maksymalny zbiór $1/n$-rozdzielony. Zdefiniujmy $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Wówczas A jest co najwyżej przeliczalny i na mocy uwagi 33, A jest gęsty w (X, d). Zatem (X, d) jest ośrodkowa.

„$\Rightarrow$” Niech D będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w (X, d) i niech A będzie zbiorem δ-rozdzielonym dla $\delta \in (0, \infty)$. Zdefiniujmy

$$D_A = D \cap \bigcup_{a \in A} B(a, \delta/2).$$

Rodzina kul $\{B(a, \delta/2)\}_{a \in A}$ jest parami rozłączna, więc dla każdego $x \in D_A$ istnieje dokładnie jeden element $a_x \in A$ taki, że $x \in B(a_x, \delta/2)$. Możemy więc zdefiniować odwzorowanie $g : D_A \to A$ wzorem $g(x) = a_x$. Ponieważ D był ośrodkiem, więc dla każdego $a \in A$ możemy znaleźć $x \in D$ taki, że $a \in B(x, \delta/2)$, co implikuje $x \in B(a, \delta/2)$. Zatem $a = g(x)$. Otrzymaliśmy, że odwzorowanie g jest suriekcją, a ponieważ zbiór D_A był co najwyżej przeliczalny, więc A również musi być co najwyżej przeliczalny. $\square$

1.4.2 Całkowita ograniczoność

Definicja 35. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $Y \subseteq X$ jest całkowicie ograniczony, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $A \subseteq X$ taki, że

$$Y \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Taki zbiór A, spełniający powyższą inkluzję, nazywamy ε-siecią.

Dla przestrzeni metrycznych z miarą zachodzi następująca charakteryzacja całkowitej ograniczoności przy pomocy tzw. funkcji podparcia i warunku δ-podwajania.

Stwierdzenie 36. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (X, d) *jest całkowicie ograniczona;*

(ii) $\mu(X) < \infty$ *oraz dla wszystkich* $r \in (0, \infty)$ $h(r) := \inf\limits_{x \in X} \mu(B(x, r)) > 0$*;*

(iii) $\operatorname{diam} X < \infty$ *oraz* μ *jest* δ*-podwajająca dla* $\delta \in (0, \operatorname{diam} X]$.

Dowód. „(i) ⇒ (ii)” Zakładamy, że (X,d) jest całkowicie ograniczona, więc dla $r \in (0,\infty)$, możemy znaleźć punkty $x_1,...,x_N \in X$ takie, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r/2). \tag{1.4.1}$$

Z (1.4.1) wynika w szczególności, że $\mu(X) < \infty$, ponieważ miara każdej kuli jest skończona. Niech $C(r) = \min_{i\in\{1,\dots,N\}} \mu(B(x_i, r/2))$. Miara każdej kuli jest dodatnia, zatem $C(r) > 0$. Dla każdego $x \in X$ możemy znaleźć $j \in \{1,\dots,N\}$ takie, że $B(x_j, r/2) \subseteq B(x,r)$, więc

$$\mu(B(x,r)) \geq C(r).$$

„(ii) ⇒ (iii)” Przypuśćmy, że $\operatorname{diam} X = \infty$. Ustalmy $r > 0$ i konstruujemy ciąg w następujący sposób: Niech $x_1 \in X$ będzie dowolnym punktem. Bierzemy dowolny punkt $x_2 \in X \setminus B(x_1, 2r)$, a następnie $x_3 \in X \setminus \Big(B(x_1,2r) \cup B(x_2,2r)\Big)$. Po wybraniu punktów $\{x_i\}_{i=1}^n$ definiujemy x_{n+1} jako dowolny punkt ze zbioru $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 2r)$. Punkt taki istnieje, bo gdyby zbiór $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 2r)$ był pusty, to by oznaczało, że $\operatorname{diam} X < \infty$. Z powyższej konstrukcji otrzymujemy ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla $m > n$ $x_m \notin B(x_n, 2r)$. Stąd wynika, że rodzina kul $\{B(x_n, r)\}_{n=1}^{\infty}$ jest parami rozłączna, a zatem

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(x_n, r)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} h(r) = \infty.$$

W takim razie $\operatorname{diam} X < \infty$. Stąd już dla wszystkich $x \in X$ i $\delta \in (0, \operatorname{diam} X]$ mamy

$$\mu(B(x,2\delta)) = \frac{\mu(B(x,2\delta))}{\mu(B(x,\delta))}\mu(B(x,\delta)) \leq \frac{\mu(X)}{h(\delta)}\mu(B(x,\delta)).$$

„(iii) ⇒ (i)” Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech A będzie maksymalnym ε-rozdzielonym zbiorem w (X,d). Wystarczy pokazać, że A jest skończony. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $2^k\varepsilon > \operatorname{diam} X$. Kule $B(x, \varepsilon/2)$ są parami rozłączne a zbiór A jest co najwyżej przeliczalny, zatem z uwagi 4

$$\begin{aligned}\mu(X) &\geq \sum_{a\in A} \mu(B(a,\varepsilon/2)) \geq C_{\varepsilon/2}^{-1} \sum_{a\in A} \mu(B(a,\varepsilon)) \geq (C_{\varepsilon/2}\, C_{\varepsilon})^{-1} \sum_{a\in A} \mu(B(a,2\varepsilon)) \\ &\geq \ldots \geq (C_{\varepsilon/2}\, C_{\varepsilon} \ldots C_{2^{k-1}\varepsilon})^{-1} \sum_{a\in A} \mu(B(a,2^k\varepsilon)) \geq \left(\prod_{l=0}^{k} C_{2^{l-1}\varepsilon}\right)^{-1} \mu(X)\,\#A.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\#A \leq \prod_{l=0}^{k} C_{2^{l-1}\varepsilon} < \infty,$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Wniosek 37. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą. Jeśli μ jest s-regularna z dołu i $\mu(X) < \infty$, to (X,d) jest całkowicie ograniczona.*

1.4.3 Twierdzenie Arzela-Ascolego

Poniższe twierdzenie pokazuje, że zarówno dla klasycznego twierdzenia Arzeli-Ascolego jak i dla twierdzenia o zwartych zanurzeniach pomiędzy przestrzeniami funkcji hölderowsko ciągłych, całkowita ograniczoność przestrzeni metrycznej jest optymalnym założeniem.

Twierdzenie 38. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Następujące warunki są równoważne:*

(i) (X, d) *jest całkowicie ograniczona;*

(ii) na (X, d) *zachodzi twierdzenie Arzela-Ascolego, tzn. dowolna, ograniczona rodzina funkcji* $\mathcal{F} \subseteq C(X, d)$*, jeśli jest jednakowo ciągła, tzn.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u \in \mathcal{F})(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

to jest prezwarta w $C(X, d)$*;*

(iii) dla wszystkich $0 < \beta < \alpha < \infty$ *zanurzenie*

$$C^{0,\alpha}(X, d) \hookrightarrow C^{0,\beta}(X, d)$$

jest zwarte;

(iv) istnieją liczby $0 < \beta < \alpha \leq 1$ *takie, że zanurzenie*

$$C^{0,\alpha}(X, d) \hookrightarrow C^{0,\beta}(X, d)$$

jest zwarte.

Dowód. Dowód implikacji „$(i) \Rightarrow (ii)$” można znaleźć w [17, twierdzenie D6.1], implikacja „$(iii) \Rightarrow (iv)$” jest oczywista, natomiast implikacja „$(iv) \Rightarrow (i)$” została pokazana w [88, twierdzenie 4.16].

Implikacja „$(ii) \Rightarrow (iii)$” jest powszechnie znana (w przypadku euklidesowym dowód można znaleźć na przykład w [45, lemat 6.33]). Poniżej zamieszczamy jej prosty dowód.

Niech $u \in C^{0,\alpha}(X, d)$ i ustalmy $\varepsilon \in (0, \infty)$. Ponieważ dla $t \in (0, 1)$ zachodzi $t^\beta > t^\alpha$, zatem

$$\begin{aligned}
[u]_{C^{0,\beta}(X,d)} &\leq \sup_{0<d(x,y)<\varepsilon} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\beta} + \sup_{d(x,y)\geq\varepsilon} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\beta} \\
&\leq \varepsilon^{-\beta} \sup_{0<d(x,y)<\varepsilon} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\beta / \varepsilon^\beta} + 2\varepsilon^{-\beta} \|u\|_{C(X,d)} \\
&\leq \varepsilon^{\alpha-\beta} [u]_{C^{0,\alpha}(X,d)} + 2\varepsilon^{-\beta} \|u\|_{C(X,d)}.
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Z powyższego rachunku w szczególności wynika, że operator zanurzenia $i : C^{0,\alpha}(X,d) \to C^{0,\beta}(X,d)$ jest zawsze dobrze zdefiniowany i ciągły.

Niech $\mathcal{F} \subseteq C^{0,\alpha}(X,d)$ będzie ograniczoną rodziną i oznaczmy $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{C^{0,\alpha}(X,d)}$. Wówczas dla każdego $u \in \mathcal{F}$ i wszystkich $x, y \in X$

$$|u(x) - u(y)| \leq Md(x,y)^\alpha.$$

Stąd wynika, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągłą, ograniczoną rodziną w $C(X,d)$, więc z założenia (ii) jest prezwarta. To oznacza, że dowolny ciąg w $\mathcal{F}$ zawiera podciąg $\{u_n\}_{n\in N}$, który jest ciągiem Cauchy'ego w $C(X,d)$. Wstawiając $u_n - u_m$ do (1.4.2) dla $n, m \in \mathbb{N}$ wynika, że dla dowolnego $\varepsilon \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\begin{aligned}[u_n - u_m]_{C^{0,\beta}(X,d)} &\leq \varepsilon^{\alpha-\beta}[u_n - u_m]_{C^{0,\alpha}(X,d)} + 2\varepsilon^{-\beta}\|u_n - u_m\|_{C(X,d)} \\ &\leq 2\varepsilon^{\alpha-\beta}M + 2\varepsilon^{-\beta}\|u_n - u_m\|_{C(X,d)}.\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\{u\}_{n\in N}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $C^{0,\beta}(X,d)$, co kończy dowód. □

1.4.4 Lemat Ulama

Lemat 39. (Ulam) *Niech (X,d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną i niech ν będzie skończoną miarą borelowską na X. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięty i całkowicie ograniczony zbiór G_ε taki, że $\nu(X \setminus G_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Niniejszy lemat w przypadku miar probabilistycznych zdefiniowanych na ośrodkowych i zupełnych przestrzeniach metrycznych jest dobrze znany w literaturze jako lemat Ulama [16, twierdzenie 1.3]. Jeśli opuścimy założenie zupełności przestrzeni, to lemat wciąż jest prawdziwy, jednakże zbiór G_ε może już nie być zwarty.

Dowód. Niech $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ będzie gęstym podzbiorem w (X,d). Dla $m, k \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$A_{m,k} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{B(x_j, 1/m)}.$$

Z gęstości zbioru $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ wynika, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ mamy $\bigcup_{k=1}^\infty A_{m,k} = X$, więc stąd wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} \nu(A_{m,k}) = \nu(X).$$

W takim razie dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje liczba k_m taka, że

$$\nu(X \setminus A_{m,k_m}) \leq 1/2^m. \tag{1.4.3}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $n \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą naturalną spełniającą $2^{1-n} < \varepsilon$. Zdefiniujmy zbiór

$$G_\varepsilon = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,k_m}.$$

Ponieważ G_ε jest częścią wspólną zbiorów domkniętych, więc musi być również zbiorem domkniętym. Dla ustalonej $\delta \in (0,\infty)$ niech $m \in \mathbb{N}$ spełnia $m > \max\{\frac{1}{\delta}, n\}$. Z inkluzji

$$G_\varepsilon \subseteq A_{m,k_m} = \bigcup_{j=1}^{k_m} \overline{B(x_j, 1/m)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_m} B(x_j, \delta)$$

otrzymujemy, że $\{x_j\}_{j=1}^{k_m}$ jest skończoną δ-siecią zbioru G_ε. Z dowolności δ wynika całkowita ograniczoność G_ε. Ponadto z nierówności (1.4.3) mamy

$$\begin{aligned}\nu(X \setminus G_\varepsilon) &= \nu(X \setminus \bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,k_m}) = \nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} X \setminus A_{m,k_m}) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \nu(X \setminus A_{m,k_m}) \leq 2^{1-n} < \varepsilon,\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. □

Wniosek 40. *Niech (X,d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną i niech ν będzie σ-skończoną miarą borelowską. Wówczas istnieją zbiory domknięte i całkowicie ograniczone $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz zbiór F typu G_δ, $\nu(F) = 0$ takie, że*

$$F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Dowód. Niech $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą wstępującymi zbiorami o mierze skończonej takimi, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\nu_n = \nu \llcorner E_n$. Z lematu 39 zastosowanego dla miary ν_n wynika, że możemy znaleźć domknięty i całkowicie ograniczony zbiór $G_n \subseteq X$ taki, że

$$\nu_n(X \setminus G_n) \leq 1/n.$$

Niech $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Pokażemy, że $F = X \setminus G$ jest zbiorem miary zero. Ponieważ

$$F = X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} E_n \setminus G_m,$$

więc wystarczy pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_n \setminus G_m$ jest zbiorem miary zero. Ponieważ $\nu_n(X \setminus G_n) = \nu(E_n \setminus G_n)$ oraz zbiory E_n były wstępujące, więc dla każdego $N \geq n$ mamy

$$\nu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_n \setminus G_m\right) \leq \nu(E_n \setminus G_N) \leq \nu(E_N \setminus G_N) \leq 1/N.$$

Przechodząc z N do nieskończoności, otrzymujemy, że zbiór $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_n \setminus G_m$ ma miarę zero, a zatem i zbiór F. Ponieważ $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus G_n$ oraz zbiory G_n są domknięte, więc stąd wynika, że F jest zbiorem typu G_δ. □

1.4.5 Całkowalność miary

Uwaga 41. *Jeśli (X, d, μ) jest przestrzenią metryczną z miarą, to można pokazać, że dla każdego $r \in (0, \infty)$ odwzorowanie $x \mapsto \mu(B(x, r))$ jest półciągłe z dołu. W związku z tym odwzorowanie*

$$x \mapsto \frac{1}{\mu(B(x,r))},$$

rozważane w definicji 42, jest mierzalne.

Definicja 42. Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą. Powiemy, że μ jest całkowalna, jeśli dla każdego $r \in (0, \infty)$

$$\int_X \frac{1}{\mu(B(x,r))}\, d\mu(x) < \infty.$$

Ponadto jeśli dla pewnej miary ν określonej na tym samym σ-ciele co μ i dla każdego $r \in (0, \infty)$

$$\int_X \frac{1}{\mu(B(x,r))}\, d\nu(x) < \infty,$$

to powiemy, że μ jest całkowalna względem ν.

Stwierdzenie 43. *Niech (X, d, μ) będzie całkowicie ograniczoną przestrzenią metryczną z miarą. Wówczas μ jest całkowalna.*

Dowód. Ze stwierdzenia 36 wynika, że $h(r) = \inf_{x \in X} \mu(B(x, r)) > 0$ oraz $\mu(X) < \infty$. Stąd

$$\int_X \frac{1}{\mu(B(x,r))} d\mu(x) \leq \mu(X)/h(r) < \infty.$$

□

Stwierdzenie 44. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą spełniającą warunek δ-podawajania dla pewnej $\delta \in (0, \infty)$. Jeśli $\operatorname{diam} X = \infty$, to μ nie jest całkowalna.*

Dowód. Niech $A \subseteq X$ będzie maksymalnym 2δ-rozdzielonym zbiorem. (X,d) jest nieograniczona, więc A musi zawierać nieskończenie wiele elementów. Ponadto dla dowolnych $x, y \in A$, $x \neq y$ mamy $B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \emptyset$. Stąd

$$\begin{aligned}\int_X \frac{1}{\mu(B(x,\delta))} d\mu(x) &\geq \sum_{y \in A} \int_{B(y,\delta)} \frac{1}{\mu(B(x,\delta))} d\mu(x) \\ &\geq \sum_{y \in A} \int_{B(y,\delta)} \frac{1}{\mu(B(y,2\delta))} d\mu(x) \\ &= \sum_{y \in A} \frac{\mu(B(y,\delta))}{\mu(B(y,2\delta))} \geq \sum_{y \in A} \frac{1}{C_\delta} = \infty.\end{aligned}$$

□

1.5 Zwartość w $L^0(X,\nu)$ i w $L^p(X,\nu)$

W naszych rozważaniach dotyczących zwartości zanurzeń w rozdziale 3 kluczową rolę odegra przestrzeń funkcji mierzalnych. Dzięki twierdzeniom 46 i 48 problem pokazania zwartości operatora zanurzenia w L^p sprowadza się do sprawdzenia p-jednakowej całkowalności oraz warunków gwarantujących nam zwartość w L^0.

1.5.1 Przestrzeń $L^0(X,\nu)$

Niech (X,ν) będzie przestrzenią z miarą taką, że $\nu(X) < \infty$. Oznaczmy przez $\widetilde{L}^0(X,\nu)$ zbiór wszystkich funkcji mierzalnych, skończonych ν-prawie wszędzie. Następnie wprowadzamy $L^0(X,\nu) = \widetilde{L}^0(X,\nu)/_\sim$, gdzie przez $\sim$ oznaczyliśmy relację równości ν-prawie wszędzie. Wreszcie dla $f, g \in L^0(X,\nu)$ definiujemy odległość w $L^0(X,\nu)$ wzorem

$$\rho(f,g) = \int\limits_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \, d\nu(x).$$

Uwaga 45. *Przestrzeń $(L^0(X,\nu), \rho)$ jest zupełną przestrzenią metryczną oraz zbieżność w metryce ρ jest równoważna zbieżności względem miary ν.*

Dowód. Funkcja $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ jest rosnąca na $[0,\infty)$ i ograniczona z góry przez 1, więc dla

$f,g,h \in L^0(X,\nu)$ mamy

$$\begin{aligned}\rho(f,h) &= \int_X \frac{|f(x)-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|}\,d\nu(x) \leq \int_X \frac{|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|}{1+|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|}\,d\nu(x) \\ &= \int_X \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|} + \frac{|g(x)-h(x)|}{1+|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|}\,d\nu(x) \\ &\leq \int_X \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,d\nu(x) + \int_X \frac{|g(x)-h(x)|}{1+|g(x)-h(x)|}\,d\nu(x) = \rho(f,g)+\rho(g,h).\end{aligned}$$

Niezdegenerowanie i symetryczność ρ są jasne. Ponadto dla $\varepsilon \in (0,\infty)$, z monotoniczności odwzorowania $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\nu(\{x\in X : |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}) &\leq \int_{\{x\in X:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\}} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,d\nu(x) \\ &\leq \rho(f,g) \\ &= \int_{\{x\in X:|f(x)-g(x)|\leq\varepsilon\}} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,d\nu(x) \\ &+ \int_{\{x\in X:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\}} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,d\nu(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\nu(X) + \nu(\{x\in X : |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}).\end{aligned}$$

Jeśli f_n zbiega do f względem miary, to stąd dla każdego $\varepsilon \in (0,\infty)$ otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(f_n,f) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\nu(X),$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n,f) = 0.$$

Natomiast zupełność ρ wynika z zupełności zbieżności względem miary (dowód tego faktu można znaleźć w [42, twierdzenie 2.30]). □

1.5.2 Twierdzenia Vitalego i Frécheta

Dowód poniższej wersji twierdzenia Vitalego można znaleźć w [79].

Twierdzenie 46 (Vitali)**.** *Niech (X,ν) będzie przestrzenią ze skończoną miarą i niech $p \in (0,\infty)$. Wówczas podzbiór $\mathcal{F} \subseteq L^p(X,\nu)$ jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

(i) $\mathcal{F}$ *jest całkowicie ograniczony w* $L^0(X,\nu)$*;*

(ii) $\mathcal{F}$ *jest p-jednakowo całkowalna, tzn.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall D \in \mathfrak{M})\ \nu(D) < \delta \implies \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_D |f(x)|^p \, d\nu(x) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 47. (Frechet) *Niech* (X,ν) *będzie przestrzenią z miarą skończoną. Podzbiór* $\mathcal{F} \subseteq L^0(X,\nu)$ *jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\lambda > 0$*, parami rozłączne zbiory mierzalne* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *takie, że* $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ *oraz dla każdego* $u \in \mathcal{F}$ *znajdziemy zbiór mierzalny* $E(u) \subseteq X$ *taki, że spełnione są następujące warunki:*

(i) $\nu(E(u)) < \varepsilon$*;*

(ii) $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$*, jeśli* $x, y \in X_i \backslash E(u)$*;*

(iii) $|u(x)| \leq \lambda$ *dla* $x \in X \backslash E(u)$*.*

Dowód. „$\Leftarrow$" Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta = \varepsilon/(1+2\nu(X))$. Z (i), (ii), (iii) wynika, że istnieje $\lambda > 0$ oraz parami rozłączne zbiory $X_1, X_2, \ldots, X_n$ spełniające $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ takie, że dla dowolnego $u \in \mathcal{F}$ znajdziemy zbiór $E(u) \subseteq X$ taki, że $\nu(E(u)) < \delta$, $|u(x)| \leq \lambda$ dla $x \in X \backslash E(u)$ oraz dla $x, y \in X_i \setminus E(u)$ mamy $|u(x) - u(y)| < \delta$.

Niech $M = \lceil \lambda/\delta \rceil$ i rozważmy następującą rodzinę funkcji

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta m_i \chi_{X_i}(x) : m_i \in \{-M, \ldots, M\} \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Ustalmy $u \in \mathcal{F}$. Dla liczb całkowitych spełniających $-M \leq m \leq M$ zdefiniujmy następujące zbiory

$$A_m = u^{-1}([\delta m, \delta(m+1))).$$

Ponieważ $\lambda \leq \delta M$, więc

$$X \setminus E(u) \subseteq \bigcup_{m=-M}^{M} A_m. \tag{1.5.1}$$

Teraz zdefiniujmy funkcję $\widetilde{u} \in S$ wzorem

$$\widetilde{u} = \sum_{i=1}^n \delta m_i \chi_{X_i},$$

gdzie dla $i \in \{1, 2 \ldots, N\}$ liczby m_i definiujemy w następujący sposób. Jeśli $X_i \setminus E(u) = \emptyset$, to $m_i = 0$. W przeciwnym wypadku, z (1.5.1) znajdujemy $m_i \in \{-M, \ldots, M\}$ oraz x_i takie, że $x_i \in A_{m_i} \cap (X_i \setminus E(u))$.

Dla dowolnego $y \in X_i \setminus E(u)$, stąd że zbiory X_i są parami rozłączne, otrzymujemy

$$|u(y) - \tilde{u}(y)| = |u(y) - \delta m_i| \leq |u(y) - u(x_i)| + |u(x_i) - \delta m_i| < 2\delta.$$

Więc dla każdego $y \in X \setminus E(u)$ mamy

$$|u(y) - \tilde{u}(y)| < 2\delta.$$

Z powyższej nierówności i definicji δ otrzymujemy, że S jest ε-siecią zbioru $\mathcal{F}$, gdyż

$$\begin{aligned}\rho(u, \tilde{u}) &= \int_{E(u)} \frac{|u - \tilde{u}|}{1 + |u - \tilde{u}|} d\nu + \int_{X \setminus E(u)} \frac{|u - \tilde{u}|}{1 + |u - \tilde{u}|} d\nu \\ &< \delta + 2\delta\nu(X) = \varepsilon.\end{aligned}$$

„$\Rightarrow$" Ustalmy $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon/3$ i niech $\{u_i\}_{i=1}^N \subseteq L^0(X,\nu)$ będzie $2\delta^2/(1+\delta)$-siecią zbioru $\mathcal{F}$. Niech $U(x) = \max\{|u_i(x)| : i = 1, \ldots, N\}$. Jest to funkcja skończona ν-prawie wszędzie oraz $\nu(X) < \infty$, więc możemy znaleźć taką $\lambda > \delta$, że

$$\nu(\{x \in X : U(x) > \lambda - \delta\}) \leq \delta.$$

Niech $Y = \{x \in X : U(x) \leq \lambda - \delta\}$ i $M = \lceil (\lambda - \delta)/\delta \rceil$. Dla $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ i $m \in \{-M, \ldots, M\}$ rozważamy następujące zbiory

$$A_m^j = \{x \in Y : u_j(x) \in [\delta m, \delta(m+1))\}.$$

Dla dowolnych $m_1, \ldots m_N \in \{-M, \ldots, M\}$ definiujemy parami rozłączne zbiory

$$X_{m_1, m_2, \ldots, m_N} = \bigcap_{j=1}^{N} A_{m_j}^j.$$

Jeśli $y \in Y$ i $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, to istnieje dokładnie jedno $m_j \in \{-M, \ldots, M\}$ takie, że $y \in A_{m_j}^j$. To oznacza, że $y \in X_{m_1, m_2, \ldots, m_N}$. Stąd

$$X = (X \setminus Y) \cup \bigcup_{m_1=-M}^{M} \cdots \bigcup_{m_N=-M}^{M} X_{m_1, m_2, \ldots, m_N}.$$

Niech $u \in \mathcal{F}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ będzie takie, że $\rho(u, u_j) < 2\delta^2/(1+\delta)$. Zdefiniujmy $E(u) = (X \setminus Y) \cup \{x \in X : |u(x) - u_j(x)| > \delta\}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\nu(E(u)) &\leq \nu(X \setminus Y) + \nu(\{x \in X : |u(x) - u_j(x)| > \delta\}) \\
&\leq \delta + \frac{1+\delta}{\delta} \int\limits_{\{x \in X: |u(x)-u_j(x)|>\delta\}} \frac{\delta}{1+\delta}\, d\nu(y) \\
&\leq \delta + \frac{1+\delta}{\delta} \int_X \frac{|u(y) - u_j(y)|}{1 + |u(y) - u_j(y)|}\, d\nu(y) < 3\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnych $x, y \in X_{m_1, m_2, \ldots m_N} \setminus E(u)$ mamy

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_j(x)| + |u_j(x) - u_j(y)| + |u_j(y) - u(y)| < 3\delta = \varepsilon.$$

Natomiast dla $x \in X \backslash E(u)$ z definicji zbiorów Y i $E(u)$ wynika

$$|u(x)| \leq |u(x) - u_j(x)| + |u_j(x)| \leq \lambda.$$

□

1.5.3 Twierdzenie Hansona

W przypadku ograniczonych podzbiorów prostej rzeczywistej, wyposażonych w metrykę euklidesową i miarę Lebesgue'a, poniższe twierdzenie jako pierwszy pokazał Hanson w artykule [59]. W pracy [79] zostało uogólnione na przypadek przestrzeni metrycznych wyposażonych w skończoną miarę podwajającą oraz w artykule [15] na przypadek całkowicie ograniczonych przestrzeni metrycznych z miarą. W poniższej wersji (pochodzącej z [6]) zakładamy jedynie, że miara jest skończona a przestrzeń metryczna jest ośrodkowa.

Twierdzenie 48. *Niech (X, d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną i niech ν będzie skończoną miarą borelowską na X. Wtedy zbiór $\mathcal{F} \subseteq L^0(X, \nu)$ jest całkowicie ograniczony, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $\delta > 0$ i $\lambda > 0$ takie, że dla dowolnego $u \in \mathcal{F}$ znajdziemy zbiór $E(u) \subseteq X$ taki, że spełnione są następujące warunki:*

(i) $\nu(E(u)) < \varepsilon$*;*

(ii) $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$*, jeśli* $x, y \in X \backslash E(u)$ *spełniają* $d(x, y) < \delta$*;*

(iii) $|u(x)| \leq \lambda$ *dla* $x \in X \backslash E(u)$*.*

Ponadto jeśli ν jest borelowsko regularna, to zachodzi implikacja w drugą stronę.

Dowód. „$\Rightarrow$” Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założeń wynika, że istnieją $\delta > 0$ i $\lambda > 0$ takie, że dla każdego $u \in \mathcal{F}$ znajdziemy zbiór $\hat{E}(u)$ taki, że $\nu(\hat{E}(u)) < \varepsilon/2$, $|u(x)| \leq \lambda$ dla $x \in X \setminus \hat{E}(u)$ oraz dla $x, y \in X \setminus \hat{E}(u)$ $|u(x) - u(y)| < \varepsilon/2$, o ile $d(x,y) < \delta$.

Korzystając z lematu 39, możemy znaleźć zbiory G_ε i B_ε takie, że $X = G_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, $\nu(B_\varepsilon) < \varepsilon/2$ oraz zbiór G_ε jest całkowicie ograniczony. Niech $\{x_i\}_{i=1}^n$, będzie $\delta/2$-siecią zbioru G_ε. Zdefiniujmy

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B(x_1, \delta/2),\\
X_i &= B(x_i, \delta/2) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j, \delta/2) \ \text{ dla } \ i \in \{2, 3, \ldots, n\},\\
X_{n+1} &= B_\varepsilon \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta/2).
\end{aligned}
$$

Zbiory X_i są parami rozłączne oraz $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$. Sprawdzimy teraz, że założenia twierdzenia 47 są spełnione.

Niech $E(u) = \hat{E}(u) \cup X_{n+1}$. Wtedy $\nu(E(u)) < \varepsilon$ oraz $|u(x)| \leq \lambda$ na $X \setminus E(u)$. Ponadto dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $x, y \in X_i \setminus E(u)$, mamy $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$. Ta nierówność również zachodzi dla $i = n+1$, ponieważ $X_{n+1} \setminus E(u) = \emptyset$.

„$\Leftarrow$” Niech $\mathcal{F}$ będzie całkowicie ograniczonym podzbiorem $L^0(X,\nu)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\{u_i\}_{i=1}^N$ będzie $\varepsilon^2/(16 + 4\varepsilon)$-siecią zbioru $\mathcal{F}$. Stosując twierdzenie 19 do każdego u_i dla $i \in \{1, \ldots, N\}$, znajdujemy zbiory domknięte $E_i \subseteq X$ takie, że funkcje $u_{i|E_i}$ są ciągłe oraz

$$\nu(X \backslash E_i) < \varepsilon/(4N). \tag{1.5.2}$$

Niech teraz $E = \bigcap_{i=1}^N E_i$. Z nierówności (1.5.2) natychmiast otrzymujemy

$$\nu(X \setminus E) < \varepsilon/4.$$

Dla $k \in \mathbb{N}$ rozważamy następujące zbiory

$$A_k = \{x \in E : \forall y \in D \text{ jeśli } d(x,y) < 1/k, \text{ to } (\forall 1 \leq i \leq N)\ |u_i(x) - u_i(y)| < \varepsilon/4\},$$

gdzie D jest gęstym podzbiorem E. Zbiory A_k można zapisać w następującej postaci

$$A_k = \bigcap_{y \in D} \left\{ x \in E : \chi_{B(y,1/k)}(x) \leq \chi_{\bigcap_{i=1}^N u_i^{-1}(u_i(y) - \varepsilon/4, u_i(y) + \varepsilon/4)}(x) \right\},$$

z której wynika ich mierzalność. Ponieważ u_i są ciągłe na E, możemy znaleźć dostatecznie duże $K \in \mathbb{N}$ takie, że $\nu(E \setminus A_K) < \varepsilon/4$. Niech $\delta = 1/(2K)$. Dobierzmy $\lambda > 0$ taką, że miara zbioru

$$F_\varepsilon = \{x \in X : \max_{i=1,\dots,N} |u_i(x)| > \lambda - \varepsilon/4\}$$

jest co najwyżej $\varepsilon/4$. Dla każdego $u \in \mathcal{F}$ możemy znaleźć $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ takie, że $\rho(u, u_j) < \varepsilon^2/(12 + 4\varepsilon)$. Z monotoniczności odwzorowania $t \mapsto t/(1+t)$ mamy

$$\begin{aligned} \nu(\{x \in X : |u(x) - u_j(x)| > \varepsilon/4\}) &\leq \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\{|u-u_j|>\varepsilon/4\}} \frac{|u(x) - u_j(x)|}{1 + |u(x) - u_j(x)|} d\nu(x) \\ &\leq \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} \rho(u, u_j) < \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Teraz definiujemy zbiór

$$E(u) = (X \setminus A_K) \cup F_\varepsilon \cup \{x \in X : |u(x) - u_j(x)| > \varepsilon/4\}.$$

Wprost z definicji zbioru $E(u)$ wynika, że warunki (i), (iii) muszą zachodzić. Pozostało sprawdzić warunek (ii). Niech $x, y \in X \setminus E(u)$ i spełniają $d(x, y) < \delta$. Możemy znaleźć $z \in D$ taki, że $d(x, z) < \delta$. Wówczas $d(y, z) < 2\delta = 1/K$ i z definicji zbioru $E(u)$ wynika

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_j(x)| + |u_j(x) - u_j(z)| + |u_j(z) - u_j(y)| + |u_j(y) - u(y)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Uwaga 49. *W twierdzeniu 48 założenie o borelowskiej regularności nie jest optymalne. Można je osłabić na przykład do semi-borelowskiej regularności, tzn. dla każdego zbioru* $E \in \mathfrak{M}$ *możemy znaleźć zbiór borelowski* $\mathfrak{B}$ *taki, że*

$$\nu(\mathfrak{B} \Delta E) = 0,$$

gdzie Δ *oznacza różnicę symetryczną zbiorów*

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Powyższą uwagę pozostawiamy bez dowodu - najistotniejsze dla nas jest to, że dla skończonych miar borelowsko regularnych twierdzenie 48 jest równoważnością, więc dla najważniejszych miar z punktu widzenia zastosowań jest to optymalne narzędzie do sprawdzania całkowitej ograniczoności w $L^0(X, \nu)$.

1.6 Jednostajna doskonałość i lemat iteracyjny

Definicja 50. Powiemy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest lokalnie jednostajnie doskonała, jeśli istnieje $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0, 1]$ zachodzi

$$B(z, r) \backslash B(z, \lambda r) \neq \emptyset. \tag{1.6.1}$$

Jeśli (X, d) jest lokalnie jednostajnie doskonała i $\lambda \in (0, 1)$ jest taka, że (1.6.1) zachodzi, to będziemy mówić, że (X, d) jest λ-lokalnie jednostajnie doskonała. Natomiast jeśli (1.6.1) zachodzi dla wszystkich $z \in X$ i wszystkich $r \in (0, \infty)$ takich, że $X \setminus B(z, r) \neq \emptyset$, to wtedy mówimy, że (X, d) jest jednostajnie doskonała (analogicznie mówimy o λ-jednostajnej doskonałości, gdy (X, d) jest jednostajnie doskonała i $\lambda \in (0, 1)$ spełnia (1.6.1) dla wszystkich $z \in X$ i wszystkich $r \in (0, \infty)$ takich, że $X \setminus B(z, r) \neq \emptyset$). Łatwo pokazać, że każda spójna przestrzeń metryczna jest jednostajnie doskonała.

Pojęcie przestrzeni jednostajnie doskonałych jest często spotykane w literaturze (na przykład w [4, 65, 107]) i pozwala osłabić założenie na spójność, zachowując techniki znane dla tych przestrzeni. W trakcie badań zauważyliśmy, że w używanych przez nas metodach wystarczy zakładać, że (1.6.1) zachodzi dla $r \in (0, 1]$, dlatego wprowadziliśmy pojęcie lokalnej jednostajnej doskonałości.

Stwierdzenie 51. *Klasa przestrzeni lokalnie jednostajnie doskonałych jest szersza niż klasa przestrzeni jednostajnie doskonałych.*

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że każda λ-jednostajnie doskonała przestrzeń metryczna (X, d) dla $\lambda \in (0, 1)$, jest lokalnie jednostajnie doskonała. Niech $\widetilde{\lambda} = \min\{\lambda, \operatorname{diam} X/3\}$ i ustalmy $z \in X$ oraz $r \in (0, 1]$. Jeśli $X \backslash B(z, r) \neq \emptyset$, to z założenia mamy, że

$$B(z, r) \setminus B(z, \lambda r) \neq \emptyset,$$

więc również zachodzi

$$B(z, r) \setminus B(z, \widetilde{\lambda} r) \neq \emptyset.$$

Z drugiej strony przypuśćmy że $X \setminus B(z, r) = \emptyset$. Ponieważ $\operatorname{diam} B(z, \widetilde{\lambda} r) \leq \frac{2}{3} \operatorname{diam} X$, to stąd już wynika, że $B(z, r) \backslash B(z, \widetilde{\lambda} r) \neq \emptyset$.

Przykładem przestrzeni lokalnie jednostajnie doskonałej, która nie jest jednostajnie doskonała jest zbiór $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dla $I_n = [2^n, 2^n + 1]$, wyposażony w metrykę euklidesową $|\cdot|$. Ustalmy $r \in (0,1]$ i niech $z \in X$. Skoro X jest sumą przedziałów długości 1, więc przynajmniej jedna z liczb $z - r/2$, $z + r/2$ należy do X i oznaczmy ją przez $\tilde{z}$. Ponieważ $|z - \tilde{z}| = r/2$, więc dla $\lambda < 1/2$ mamy $\tilde{z} \in B(z,r) \setminus B(z, \lambda r)$ co oznacza, że $(X, |\cdot|)$ jest lokalnie jednostajnie doskonała. Przypuśćmy, że $(X, |\cdot|)$ jest λ-jednostajnie doskonała dla pewnej $\lambda \in (0,1)$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\lambda(2^n - 1) > 1$, ustalmy $z \in I_{n+1}$ i weźmy $r = 2^n - 1$. Ponieważ

$$B(z,r) = B(z, \lambda r) = I_{n+1},$$

więc $B(z,r) \setminus B(z, \lambda r) = \emptyset$, pomimo że $X \setminus B(z,r) \neq \emptyset$. Zatem $(X, |\cdot|)$ nie może być jednostajnie doskonała. $\square$

Teraz dla $z \in X$ definiujemy pomocniczą funkcję $\phi_z : [0, \infty) \to [0, \infty)$ wzorem

$$\phi_z(r) = \sup \Big\{ t \in [0,r] : \mu(B(z,t)) \leq \frac{1}{2} \mu(B(z,r)) \Big\}.$$

Dzięki poniższemu lematowi i powyższej funkcji pomocniczej, okazuje się, że dla λ-lokalnie jednostajnie doskonałych przestrzeni metrycznych z miarą, warunek dolnej regularności miary wystarczy sprawdzać dla promieni, które kontrolujemy z góry przez ϕ_z. Odegra to kluczową rolę w rozdziale 2 przy dowodzeniu twierdzeń 84 i 85.

Lemat 52. *Niech (X, d, μ) będzie λ-lokalnie jednostajnie doskonałą przestrzenią metryczną z miarą dla $\lambda \in (0, 1/5)$. Wtedy:*

i) jeśli istnieją $C > 0$ i $t > 0$ takie, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$ spełniających $r \leq 3\phi_z(r)/\lambda^2$ mamy

$$\mu(B(z,r)) \geq C r^t, \tag{1.6.2}$$

to dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$ zachodzi

$$\mu(B(z,r)) \geq 2^t \lambda^t C r^t; \tag{1.6.3}$$

ii) jeśli $r \in (0,1]$ i spełnia $r \leq 3\phi_z(r)/\lambda^2$ oraz $r_j := (2^{-j-1} + 2^{-1})\phi_z(r)$, to dla wszystkich $c \in \mathbb{R}$ mamy $|\Phi_{r_{j+1}, r_j} - c| \geq \frac{1}{2}$ na pewnym zbiorze zawartym w $B(z,r)$ takim, że jego miara jest równa co najmniej $\mu(B(z, r_{j+1}))$.

Niemal identyczną wersję lematu dla jednostajnie doskonałych przestrzeni metrycznych z miarą można znaleźć w [4, lemat 11]. Poniżej przedstawiamy szkic dowodu pokazujący, że wystarczy zakładać lokalną jednostajną doskonałość.

Dowód. i) Ustalmy $z \in X$ i niech $r \in (0,1]$ spełnia $r > 3\phi_z(r)/\lambda^2$. Ponieważ

$$\phi_z(r)/\lambda + 2\lambda r < \lambda r/3 + 2\lambda r < 7/15 < 1,$$

więc możemy wziąć punkt

$$\widetilde{z} \in B\Big(z, \phi_z(r)/\lambda + 2\lambda r\Big) \backslash B\Big(z, \phi_z(r) + 2\lambda^2 r\Big).$$

Niech $\widetilde{r} = 2\phi_z(r)/\lambda + 2\lambda r$. Powtarzając rozumowanie z dowodu [4, lemat 11], otrzymujemy

$$\overline{B}(z, \phi_z(r)) \subseteq B(\widetilde{z}, \widetilde{r}) \subseteq B(z, r) \text{ oraz } B(\widetilde{z}, 2^{-1}\lambda\widetilde{r}) \subseteq B(z, r) \backslash \overline{B}(z, \phi_z(r)) \tag{1.6.4}$$

i stąd

$$\mu\Big(B(\widetilde{z}, 2^{-1}\lambda\widetilde{r})\Big) \leq \frac{1}{2}\mu\Big(B(\widetilde{z}, \widetilde{r})\Big).$$

Wprost z definicji funkcji ϕ otrzymujemy $\phi_{\widetilde{z}}(\widetilde{r}) \geq 2^{-1}\lambda\widetilde{r}$. Zatem $\widetilde{r} \leq 2\phi_{\tilde{z}}(\widetilde{r})/\lambda \leq 3\phi_{\tilde{z}}(\widetilde{r})/\lambda^2$ oraz zachodzi $\tilde{r} < r$. Ostatecznie, korzystając z założenia (1.6.2), inkluzji (1.6.4) i z faktu, że $\widetilde{r} \geq 2\lambda r$, otrzymujemy

$$\mu\Big(B(z, r)\Big) \geq \mu\Big(B(\tilde{z}, \tilde{r})\Big) \geq C\tilde{r}^t \geq 2^t\lambda^t C r^t.$$

ii) Ta część wynika z [4, konstrukcja 15]. □

Poniższy lemat jest niezwykle użyteczny w sytuacjach, gdy chcemy znaleźć warunki konieczne na zachodzenie ciągłości zanurzeń i odegra kluczową rolę w dowodach twierdzeń 82, 83, 84, 85 oraz 98.

Lemat 53. *[4, lemat 16] Załóżmy, że $0 < a < b < \infty$, $0 < p < q < \infty$ i $\rho, \tau \in (0, \infty)$. Jeśli ciąg $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ spełnia*

$$a \leq a_j \leq b$$

oraz

$$a_{j+1}^{\frac{1}{q}} \leq \rho\tau^j a_j^{\frac{1}{p}} \text{ dla wszystkich } j \in \mathbb{N},$$

wówczas

$$1 \leq a_1^{1-\frac{p}{q}} \rho^p \tau^{\frac{pq}{q-p}}.$$

Dowód. Niech $\alpha = p/q \in (0,1)$. Po podniesieniu drugiej nierówności do potęgi $p\alpha^{j-1}$ otrzymujemy

$$a_{j+1}^{\alpha^j} \le \rho^{p\alpha^{j-1}} \tau^{jp\alpha^{j-1}} a_j^{\alpha^{j-1}}.$$

Wprowadzamy oznaczenie $P_j = a_j^{\alpha^{j-1}}$. Wówczas powyższa nierówność przyjmuje postać

$$P_{j+1} \le \rho^{p\alpha^{j-1}} \tau^{jp\alpha^{j-1}} P_j.$$

Ponieważ $P_1 = a_1$, iterowanie powyższej nierówności prowadzi do

$$P_{j+1} \le a_1 \prod_{k=1}^{j} \rho^{p\alpha^{k-1}} \tau^{pk\alpha^{k-1}} = a_1 \rho^{p\sum_{k=1}^{j} \alpha^{k-1}} \tau^{p\sum_{k=1}^{j} k\alpha^{k-1}}.$$

Z drugiej strony z nierówności $0 < a \le a_j \le b < \infty$ oraz zbieżności $\alpha^j \to 0$ wynika zbieżność $P_j \to 1$. Przechodząc do granicy w powyższej nierówności i korzystając z ciągłości funkcji wykładniczej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 &\le a_1 \rho^{p\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}} \tau^{p\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}} \\ &= a_1 \rho^{p/(1-\alpha)} \tau^{p/(1-\alpha)^2} = a_1 \rho^{pq/(q-p)} \tau^{pq^2/(q-p)^2}. \end{aligned}$$

Podnosząc otrzymaną nierówność do potęgi $1 - p/q$, otrzymujemy tezę lematu. □

1.7 Operator mediany

Poniżej wprowadzamy operator mediany, który jest niezwykle przydatny, gdy chcemy w naszych rozważaniach dotyczących przestrzeni funkcyjnych, zdefiniowanych przy pomocy przestrzeni L^p, uwzględnić też przypadek $p \in (0,1)$. Jednym z pierwszych autorów, którzy zastosowali operator mediany był Strömberg, który w pracy [101] analizował przestrzenie BMO. Później własności operatora mediany były badane m.in. w [43].

Definicja 54. Niech (X,μ) będzie przestrzenią z miarą i ustalmy zbiór mierzalny $E \subseteq X$ o mierze dodatniej i skończonej. Niech dana będzie funkcja mierzalna $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Medianę z u na E definiujemy wzorem

$$m_u(E) = \sup \Big\{ a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : u(x) < a\}) \le \mu(E)/2 \Big\}.$$

Stwierdzenie 55. *Niech będą spełnione założenia z definicji 54 i załóżmy dodatkowo, że $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ jest skończona μ-prawie wszędzie. Wówczas*

$$m_u(E) = \max \Big\{ a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : u(x) < a\}) \le \mu(E)/2 \Big\}.$$

Dowód. Ponieważ u jest skończona μ-prawie wszędzie, zatem ciągłość miary implikuje

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in E: u(x)<n\})=\mu(\{x\in E: u(x)<\infty\})=\mu(E),$$
$$\lim_{n\to-\infty}\mu(\{x\in E: u(x)<n\})=\mu(\{x\in E: u(x)=-\infty\})=0.$$

W takim razie istnieją dwie liczby $n, N\in\mathbb{Z}$ takie, że

$$\mu(\{x\in E: u(x)<n\})<\mu(E)/2<\mu(\{x\in E: u(x)<N\}).$$

Stąd wynika, że

$$-\infty<n\leq m_u(E)\leq N<\infty.$$

Funkcja $a\mapsto\mu(\{x\in E: u(x)<a\})$ jest niemalejąca, więc dla każdego $i\in\mathbb{N}$ z definicji mediany wynika nierówność

$$\mu(\{x\in E: u(x)<m_u(E)-1/i\})\leq\mu(E)/2.$$

Stąd

$$\mu(\{x\in E: u(x)<m_u(E)\})=\lim_{i\to\infty}\mu(\{x\in E: u(x)<m_u(E)-1/i\})\leq\mu(E)/2.$$

$\square$

Stwierdzenie 56. *Niech $u: E\to\overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna i skończona μ-prawie wszędzie. Wówczas:*

(i) jeśli $c\in\mathbb{R}$, to $m_u(E)-c=m_{u-c}(E)$;

(ii) jeśli $c>0$, to $cm_u(E)=m_{cu}(E)$;

(iii) $|m_u(E)|\leq m_{|u|}(E)$.

Dowód. Dwie pierwsze własności wynikają natychmiast z poprzedniego stwierdzenia. Załóżmy, że $m_u(E)>0$. W tym przypadku (iii) wynika z inkluzji

$$\{x\in E: |u(x)|<m_u(E)\}\subseteq\{x\in E: u(x)<m_u(E)\}.$$

Z drugiej strony ze stwierdzenia 55 wynika, że

$$\mu(\{x\in E: u(x)\leq m_u(E)\})\geq\mu(E)/2.$$

Stąd jeśli $m_u(E)\leq 0$, to (iii) otrzymujemy łącząc powyższą nierówność z poniższą inkluzją

$$\{x\in E: |u(x)|<|m_u(E)|\}\subseteq\{x\in E: u(x)>m_u(E)\}.$$

$\square$

Dowód poniższego lematu jest drobną modyfikacją dowodu, który można znaleźć w [47, (2.4)] lub [108, (2.6)]), jednakże dla wygody czytelnika zamieszczamy go poniżej.

Lemat 57. *Niech (X, μ) będzie przestrzenią z miarą i E będzie mierzalnym podzbiorem X o mierze dodatniej i skończonej. Załóżmy, że $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją mierzalną i skończoną μ-prawie wszędzie. Wówczas dla dowolnego $p \in (0, \infty)$ i $c \in \mathbb{R}$ mamy*

$$|m_u(E) - c| \leq \left(2 \fint_E |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{1.7.1}$$

Dowód. Na mocy stwierdzenia 56, wystarczy pokazać, że

$$m_{|u-c|}(E) \leq \left(2 \fint_E |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{1.7.2}$$

Niech $\eta > 2$ i $\delta = \fint_E |u(x) - c|^p \, d\mu(x)$. Możemy założyć, że[3] $\delta \in (0, \infty)$. Z nierówności Czebyszewa mamy

$$\mu(\{x \in E : |u(x) - c| \geq (\eta\delta)^{1/p}\}) \leq \frac{1}{\eta\,\delta} \int_E |u(x) - c|^p \, d\mu(x) = \frac{1}{\eta}\mu(E) < \frac{1}{2}\mu(E).$$

Stąd

$$m_{|u-c|}(E) \leq \left(\eta \fint_E |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Przechodząc z $\eta \to 2$, otrzymujemy (1.7.2). □

Wniosek 58. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu i niech u będzie funkcją mierzalną, skończoną μ-prawie wszędzie. Jeśli $p \in (0, \infty)$, to dla wszystkich $x \in X$ takich, że $|u(x)| < \infty$ oraz $z \in X$ i $r \in (0, 1]$ mamy*

$$|m_u(B(z, r)) - u(x)|^p \leq 2b\, r^{-s} \int_{B(z,r)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y), \tag{1.7.3}$$

gdzie $b \in (0, \infty)$ spełnia (1.2.2).

Warto zaznaczyć, że przy założeniach powyższego wniosku odwzorowanie $X \ni z \mapsto m_u(B(z, r))$ jest mierzalne. Wynika to ze stwierdzenia 55 i mierzalności odwzorowania $X \ni z \mapsto \mu(B(z, r))$, ponieważ dla $c \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}\{z \in X : m_u(B(z, r)) < c\} &= \{z \in X : \mu(\{x \in B(z, r) : u(x) < c\}) > \mu(B(z, r))/2\} \\ &= \{z \in X : \mu\llcorner\Big(u^{-1}([-\infty, c)\Big)\Big(B(z, r)\Big) > \mu(B(z, r))/2\}.\end{aligned}$$

[3]Jeśli $\delta = \infty$ to (1.7.2) oczywiście zachodzi. Natomiast jeśli $\delta = 0$, to wtedy $u \equiv c$ na E. Ponieważ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ $m_c(E) = c$, więc również i w tym przypadku (1.7.2) zachodzi.

1.8 Przestrzenie Słobodeckiego, ułamkowe przestrzenie Hajłasza

Definicja 59. Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech $\alpha, p, s \in (0, \infty)$ będą ustalone. Definiujemy jednorodną przestrzeń Słobodeckiego $\dot{W}_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$, jako klasę funkcji u mierzalnych i skończonych μ-prawie wszędzie takich, że poniższa wielkość jest skończona

$$[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} := \left(\iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \right)^{1/p}. \tag{1.8.1}$$

Wówczas $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$ jest quasi-półnormą na $\dot{W}_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$. Niejednorodną przestrzeń Słobodeckiego definiujemy jako $W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu) = \dot{W}_s^{\alpha,p}(X, d, \mu) \cap L^p(X, \mu)$ z quasi-normą

$$\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} := \|u\|_{L^p(X,\mu)} + [u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

Uwaga 60. *Ponieważ zbiór $\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \in (0, 1)\}$ jest otwarty w topologii produktowej, ze stwierdzenia 14 przestrzenie metryczne z miarą są ośrodkowe oraz z lematu 8 mamy $\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$, więc stąd otrzymujemy, że wielkość (1.8.1) jest dobrze zdefiniowana. Ponadto przestrzenie metryczne z miarą są σ-skończone, więc z twierdzenia Fubiniego*

$$[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \left(\int_X \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Fakt 61. *Dla każdej przestrzeni metrycznej z miarą (X, d, μ) i każdego $\alpha, p, s \in (0, \infty)$ przestrzeń $W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ jest zupełna.*

Dowód. Niech $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$. Z zupełności $L^p(X, \mu)$ wynika, że istnieje $u \in L^p(X, \mu)$ takie, że $u_n \to u$ w $L^p(X, \mu)$. Niech $f \in W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ i zapiszmy quasi-półnormę Słobodeckiego w nastepującej postaci

$$\begin{aligned}
[f]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} &= \iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&= \iint\limits_{X\times X} |f(x) - f(y)|^p \frac{\chi_{\{0<d(x,y)<1\}}(x,y)}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&= \int\limits_{X\times X} |f(x) - f(y)|^p \, d\mathcal{V}(x,y),
\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{V}$ jest miarą absolutnie ciągłą względem $\mu \otimes \mu$ daną przez

$$\mathcal{V}(A) = \iint_A \frac{\chi_{\{0<d(x,y)<1\}}(x,y)}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$

dla każdego zbioru mierzalnego $A \subseteq X \times X$. Stąd

$$\begin{aligned}[u_n - u_m]^p_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} &= \int_{X\times X} |u_n(x) - u_m(x) - (u_n(y) - u_m(y))|^p\, d\mathcal{V}(x,y) \\ &= \int_{X\times X} |U_n(x,y) - U_m(x,y)|^p\, d\mathcal{V}(x,y),\end{aligned}$$

gdzie $U_n(x,y) = u_n(x) - u_n(y)$. Z zupełności $L^p(X \times X, \mathcal{V})$ wynika, że istnieje $U \in L^p(X \times X, \mathcal{V})$ takie, że $U_n \to U$ w $L^p(X \times X, \mathcal{V})$. Żeby zakończyć dowód zupełności, wystarczy pokazać, że dla $\mathcal{V}$-prawie wszystkich (x,y) mamy $U(x,y) = u(x) - u(y)$. Możemy wybrać podciąg $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ zbieżny punktowo do u na zbiorze $X \setminus E$, gdzie $\mu(E) = 0$. Wówczas dla wszystkich $(x,y) \in (X \setminus E) \times (X \setminus E)$

$$U_{n_j}(x,y) \to u(x) - u(y) =: \tilde{U}(x,y).$$

Ponieważ $(X \times X) \setminus (X \setminus E) \times (X \setminus E) = (X \times E) \cup (E \times X)$ oraz $\mathcal{V}$ jest absolutnie ciągła względem $\mu\otimes\mu$, więc stąd otrzymujemy, że $U_{n_j} \to \tilde{U}$ $\mathcal{V}$-prawie wszędzie. Z jednoznaczności granicy punktowej wynika, że $U(x,y) = \tilde{U}(x,y) = u(x) - u(y)$ dla $\mathcal{V}$-prawie wszystkich (x,y), co kończy dowód. $\square$

Poniższa uwaga zachodzi w szczególności, gdy $\mu(X) < \infty$.

Uwaga 62. *Jeśli (X,d,μ) jest przestrzenią metryczną z miarą i istnieją $s, b \in (0,\infty)$ takie, że dla każdego $x \in X$ i $r \in [1,\infty)$*

$$\mu(B(x,r)) \leq br^s,$$

to dla każdego $\alpha, p \in (0,\infty)$ wielkość

$$\|u\|_{L^p(X,\mu)} + \left(\iint_{d(x,y)\neq 0} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

zadaje na $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ quasi-normę równoważną z $\|\cdot\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}$.

Dowód. Dla każdego $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ mamy

$$\begin{aligned}\iint\limits_{d(x,y)\geq 1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\,d\mu(y)\,d\mu(x) &\leq 2^p \iint\limits_{d(x,y)\geq 1} \frac{|u(x)|^p+|u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\ &= 2^{p+1}\int_X |u(x)|^p \int_{X\setminus B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\ &= 2^{p+1}\int_X |u(x)|^p \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B(x,2^{k+1})\setminus B(x,2^k)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\ &\leq 2^{p+1}\int_X |u(x)|^p \sum_{k=0}^{\infty}\mu(B(x,2^{k+1}))2^{-k(s+\alpha p)}\,d\mu(x)\\ &\leq b2^{s+p+1}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha p}\|u\|^p_{L^p(X,\mu)} = \frac{b2^{s+p+1}}{1-2^{-\alpha p}}\|u\|^p_{L^p(X,\mu)}.\end{aligned}$$

Stąd już wynika równoważność quasi-norm. □

W poniższych definicjach wyjątkowo dopuszczamy, aby μ nie była niezdegenerowana, natomiast w głównych wynikach dotyczących poniższych przestrzeni zazwyczaj będziemy zakładać niezdegenerowanie miary.

Definicja 63. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ i ustalmy $\alpha \in (0,\infty)$. Jeśli u jest funkcją mierzalną i skończoną μ-prawie wszędzie, to powiemy, że funkcja mierzalna g jest α-gradientem Hajłasza funkcji u, jeśli $g \geq 0$, istnieje zbiór mierzalny $A_u \subseteq X$ taki, że $\mu(A_u)=0$ oraz dla każdego $x,y \in X\setminus A_u$ zachodzi nierówność

$$|u(x)-u(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha\Big(g(x)+g(y)\Big). \tag{1.8.2}$$

Zbiór wszystkich α-gradientów Hajłasza funkcji u oznaczamy przez $\mathbb{D}^\alpha(u)$.

Definicja 64. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ oraz ustalmy $\alpha \in (0,\infty)$, $p \in (0,\infty]$. Definiujemy jednorodną, ułamkową przestrzeń Hajłasza-Sobolewa $\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ jako klasę funkcji u mierzalnych i skończonych μ-prawie wszędzie takich, że zbiór $\mathbb{D}^\alpha(u)\cap L^p(X,\mu)$ jest niepusty. Na $\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ definiujemy quasi-półnormę wzorem

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \inf_{g\in\mathbb{D}^\alpha(u)}\|g\|_{L^p(X,\mu)}. \tag{1.8.3}$$

Niejednorodną, ułamkową przestrzeń Hajłasza definiujemy jako

$$M^{\alpha,p}(X,d,\mu) = \dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)\cap L^p(X,\mu)$$

z quasi-normą

$$\|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)} := \|u\|_{L^p(X,\mu)} + \|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

Lemat 65. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ. Niech $E, F \subseteq X$ będą niepustymi zbiorami mierzalnymi takimi, że $\operatorname{dist}(E,F) > 0$. Wówczas funkcja $\phi : X \to [0,1]$ dana wzorem*

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,E)}{\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F)}$$

spełnia:

(i) $\phi|_E = 0$ *oraz* $\phi|_F = 1$*;*

(ii) ϕ *jest lipszycowsko ciągła, ze stałą Lipszyca* $\operatorname{dist}(E,F)^{-1}$*;*

(iii) dla każdego $p \in (0,\infty)$

$$\|\phi\|_{\dot{M}^{1,p}(X,d,\mu)} \le \operatorname{dist}(E,F)^{-1}\mu(X \setminus E)^{1/p}.$$

Dowód. Zaczniemy od pokazania (ii), gdyż (i) natychmiast wynika z definicji funkcji ϕ. Niech $x, y \in X$ i załóżmy, że $\phi(x) \ge \phi(y)$. Wówczas z nierówności (1.1.1) i (1.1.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &= \frac{\operatorname{dist}(x,E)}{\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F)} - \frac{\operatorname{dist}(y,E)}{\operatorname{dist}(y,E) + \operatorname{dist}(y,F)} \\
&= \frac{\operatorname{dist}(x,E)\operatorname{dist}(y,F) - \operatorname{dist}(y,E)\operatorname{dist}(x,F)}{(\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F))(\operatorname{dist}(y,E) + \operatorname{dist}(y,F))} \\
&\le \frac{(d(x,y) + \operatorname{dist}(y,E))\operatorname{dist}(y,F) - \operatorname{dist}(y,E)\operatorname{dist}(x,F)}{(\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F))(\operatorname{dist}(y,E) + \operatorname{dist}(y,F))} \\
&= \frac{d(x,y)\operatorname{dist}(y,F) + \operatorname{dist}(y,E)(\operatorname{dist}(y,F) - \operatorname{dist}(x,F))}{(\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F))(\operatorname{dist}(y,E) + \operatorname{dist}(y,F))} \\
&\le \frac{d(x,y)\operatorname{dist}(y,F) + \operatorname{dist}(y,E)\,d(x,y)}{(\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F))(\operatorname{dist}(y,E) + \operatorname{dist}(y,F))} \\
&= \frac{d(x,y)}{\operatorname{dist}(x,E) + \operatorname{dist}(x,F)} \le \operatorname{dist}(E,F)^{-1} d(x,y).
\end{aligned}$$

Przejdźmy do dowodu (iii). Pokażemy, że $g := \operatorname{dist}(E,F)^{-1}\chi_{X\setminus E}$ jest 1-gradientem funkcji ϕ. Jeśli $x, y \in E$, to nierówność

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le d(x,y)(g(x) + g(y))$$

jest trywialna. Natomiast jeśli $x \notin E$ lub $y \notin E$, to $g(x)+g(y) \geq \mathrm{dist}(E,F)^{-1}$, więc z (ii) otrzymujemy, że $g \in \mathbb{D}^1(u)$ i stąd

$$\|\phi\|_{\dot{M}^{1,p}(X,d,\mu)} \leq \|g\|_{L^p(X,\mu)} = \mathrm{dist}(E,F)^{-1}\mu(X \setminus E)^{1/p}.$$

□

1.9 Przestrzenie Hajłasza-Besova i Hajłasza-Triebla-Lizorkina

Definicja 66. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ oraz ustalmy $\alpha \in (0,\infty)$. Niech u będzie funkcją mierzalną i skończoną μ-prawie wszędzie. Ciąg nieujemnych funkcji mierzalnych $\vec{g} := \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, zdefiniowanych na X, nazwiemy ułamkowym α-gradientem funkcji u, jeśli istnieje zbiór mierzalny $A_u \subseteq X$ taki, że $\mu(A_u) = 0$ oraz zachodzi nierówność

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha \Big(g_k(x) + g_k(y)\Big) \tag{1.9.1}$$

dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ i wszystkich $x, y \in X \setminus A_u$ spełniających $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$. Zbiór ułamkowych α-gradientów funkcji u oznaczamy przez $\vec{\mathbb{D}}^\alpha(u)$.

Dla ustalonego ciągu $\vec{g} := \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ funkcji mierzalnych zdefiniowanych na X, wprowadzamy wielkości

$$\|\vec{g}\|_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)} := \Big\| \|\{g_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \Big\|_{L^p(X,\mu)}$$

oraz

$$\|\vec{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))} := \Big\| \Big\{ \|g_k\|_{L^p(X,\mu)} \Big\}_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{\ell^q(\mathbb{Z})},$$

gdzie

$$\|\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} := \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|^q\right)^{1/q} & \text{dla } q \in (0,\infty), \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}} |g_k| & \text{dla } q = \infty. \end{cases}$$

Definicja 67. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ oraz ustalmy $\alpha \in (0,\infty)$, $p,q \in (0,\infty]$. Definiujemy jednorodną przestrzeń

Hajłasza-Triebla-Lizorkina $\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ jako klasę funkcji u mierzalnych i skończonych μ-prawie wszędzie takich, że poniższa wielkość

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)} := \inf_{\overrightarrow{g}\in\overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)} \|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)}$$

jest skończona. Powyższa wielkość zadaje na $\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ quasi-półnormę. Niejednorodną przestrzeń Hajłasza–Triebla–Lizorkina definiujemy jako $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) = L^p(X,\mu)\cap \dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ z quasi-normą

$$\|u\|_{M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)} := \|u\|_{L^p(X,\mu)} + \|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)}.$$

Definicja 68. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ oraz ustalmy $\alpha \in (0,\infty)$, $p,q \in (0,\infty]$. Definiujemy jednorodną przestrzeń Hajłasza–Biesowa $\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ jako klasę funkcji u mierzalnych i skończonych μ-prawie takich, że poniższa wielkość

$$\|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)} := \inf_{\overrightarrow{g}\in\mathbb{D}^{\alpha}_{d}(u)} \|\overrightarrow{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))}$$

jest skończona. Powyższa wielkość zadaje na $\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ quasi-półnormę. Niejednorodną przestrzeń Hajłasza–Biesowa definiujemy jako $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) = L^p(X,\mu)\cap \dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ z quasi-normą

$$\|u\|_{N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)} := \|u\|_{L^p(X,\mu)} + \|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)}.$$

Uwaga 69. *Na mocy [63, twierdzenie 5.1], przestrzenie Hajłasza-Biesowa i Hajłasza-Triebla-Lizorkina są zawsze zupełne. Zatem jeśli $p \in [1,\infty)$ i $q \in [1,\infty]$, to $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ i $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ są przestrzeniami Banacha. W przeciwnym wypadku są to przestrzenie quasi-Banacha. Ponadto w pracy [78] zostało pokazane, że $M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pokrywa się z klasyczną przestrzenią Triebla–Lizorkina zdefiniowaną poprzez transformatę Furiera i rozkład Paleya–Littlewooda $F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnych $\alpha \in (0,1)$, $p \in (\frac{n}{n+\alpha},\infty)$ oraz $q \in (\frac{n}{n+\alpha},\infty]$. Natomiast przestrzeń $N^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pokrywa się z klasyczną przestrzenią Biesowa $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich $\alpha \in (0,1)$, $p \in (\frac{n}{n+\alpha},\infty)$ i $q \in (0,\infty]$.*

Stwierdzenie 70. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech μ będzie miarą borelowską. Wówczas dla dowolnych $\alpha,\sigma,p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ $r \in [q,\infty]$:*

i) $\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow \dot{N}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)$*;*

ii) $\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow \dot{M}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)$;

iii) $\dot{M}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu) = \dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ *z równymi quasi-półnormami;*

iv) $\dot{M}^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu) = \dot{N}^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu)$ *z równymi quasi-półnormami;*

v) $N^{\alpha+\sigma}_{p,r}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$;

vi) $M^{\alpha+\sigma}_{p,r}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$;

vii) $\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow \dot{N}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu)$.

Dowód. Ustalmy $\alpha,\sigma,p\in(0,\infty)$, $q\in(0,\infty]$ i $r\in[q,\infty]$. Zaczniemy od pokazania, że dla dowolnego ciągu $a=\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ zachodzi

$$\|a\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \le \|a\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}. \tag{1.9.2}$$

Powyższa nierówność jest dobrze znana, jednakże postanowiliśmy zamieścić jej dowód, ponieważ jest bardzo prosty i elegancki.

Dla $r=q$ nierówność jest oczywista. Ponieważ dla każdego $k\in\mathbb{Z}$ mamy

$$|a_k|^q \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^q,$$

więc dla $r=\infty$ natychmiast zachodzi nierówność

$$\|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \le \|a\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}. \tag{1.9.3}$$

Natomiast jeśli $q<r<\infty$, to korzystając z (1.9.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|a\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{r-q}|a_k|^q\right)^{1/r} \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a\|^{r-q}_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}|a_k|^q\right)^{1/r}\\ &= \|a\|^{1-q/r}_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^q\right)^{1/r} = \|a\|^{1-q/r}_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\|a\|^{q/r}_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le \|a\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$

i) Ustalmy $u\in\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ i niech $\vec{g}=\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\vec{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$ będzie taki, że

$$\|\vec{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))}<\infty.$$

Wstawiając $a:=\{\|g_k\|_{L^p(X,\mu)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ do (1.9.2), otrzymujemy

$$\|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)} \le \|\vec{g}\|_{\ell^r(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))} \le \|\vec{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))}.$$

Biorąc infimum po wszystkich $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$, dostajemy

$$\|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)} \leq \|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)}.$$

ii) Ustalmy $u \in \dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ i niech $\overrightarrow{g} = \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$ będzie taki, że

$$\|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)} < \infty.$$

Istnieje zbiór miary zero $N \subseteq X$ taki, że dla każdego $x \in X \setminus N$

$$\|\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} < \infty.$$

Stąd w szczególności wynika, że dla $x \in X \setminus N$ i wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ wartości $g_k(x)$ są skończone. Stosujemy więc (1.9.2) dla $a = \{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, gdzie $x \in X \setminus N$ i otrzymujemy

$$\|\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^p_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leq \|\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^p_{\ell^q(\mathbb{Z})}$$

a stąd już wynika

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)} \leq \|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^r(\mathbb{Z}),\mu)} \leq \|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)}.$$

Zatem zachodzi nierówność

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,r}(X,d,\mu)} \leq \|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)}.$$

iii) Ustalmy $u \in \dot{M}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu)$ i niech $\overrightarrow{g} = \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$ spełnia

$$\|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^\infty(\mathbb{Z}),\mu)} < \infty.$$

Definiujemy funkcję $g(x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x)$. Jest to nieujemna funkcja mierzalna oraz $g \in \mathbb{D}^{\alpha}(u)$. Stąd

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \leq \|g\|_{L^p(X,\mu)} = \|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^\infty(\mathbb{Z}),\mu)}.$$

Jeśli weźmiemy infimum po wszystkich $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$, to otrzymamy nierówność

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \leq \|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu)}.$$

Z drugiej strony dla dowolnych $u \in M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i $g \in \mathbb{D}^{\alpha}(u)$ definiujemy $\overrightarrow{g}(x) = \{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, gdzie $g_k(x) = g(x)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$ oraz

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu)} \leq \|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^\infty(\mathbb{Z}),\mu)} = \|g\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,\infty}(X,d,\mu)} \leq \|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

iv) zachodzi, ponieważ dla dowolnego ciągu $\overrightarrow{g} = \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ funkcji mierzalnych, zdefiniowanych na X mamy

$$\|\overrightarrow{g}\|^p_{L^p(X;\ell^p(\mathbb{Z}),\mu)} = \int_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k(x)|^p \, d\mu(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X |g_k(x)|^p \, d\mu(x) = \|\overrightarrow{g}\|^p_{\ell^p(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))}.$$

v) Na mocy podpunktu *i*), wystarczy pokazać *v*) dla $r = \infty$. Niech $u \in N^{\alpha+\sigma}_{p,\infty}(X,d,\mu)$ i $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha+\sigma}(u)$. Dla $x \in X$ i $k \in \mathbb{Z}$ definiujemy $\overrightarrow{h} = \{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ wzorem

$$h_k(x) = \begin{cases} 2^{-k\sigma} g_k(x) & \text{dla } k \geq 0, \\ 2^{k\alpha+\alpha}|u(x)| & \text{dla } k < 0. \end{cases}$$

Pokażemy, że $\overrightarrow{h} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$. Niech $A_u \subseteq X$ będzie zbiorem miary zero z definicji $\overrightarrow{g}$. Wówczas dla każdego $k \geq 0$ i wszystkich $x, y \in X \setminus A_u$, spełniających $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$, zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq [d(x,y)]^{\alpha+\sigma}\Big(g_k(x) + g_k(y)\Big) \\ &\leq [d(x,y)]^{\alpha}\, 2^{-k\sigma}\Big(g_k(x) + g_k(y)\Big) \\ &= [d(x,y)]^{\alpha}\Big(h_k(x) + h_k(y)\Big). \end{aligned}$$

Natomiast dla $k < 0$, $x, y \in X \setminus A_u$ takich, że $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$ mamy

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x)| + |u(y)| = 2^{-(k+1)\alpha}\, 2^{(k+1)\alpha} \left(|u(x)| + |u(y)|\right) \\ &\leq [d(x,y)]^{\alpha}\Big(h_k(x) + h_k(y)\Big). \end{aligned}$$

Ponieważ zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{h}\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X h_k^p \, d\mu\right)^{q/p} \\ &= \sum_{k\geq 0} 2^{-kq\sigma}\left(\int_X g_k^p \, d\mu\right)^{q/p} + 2^{q\alpha} \sum_{k<0} 2^{kq\alpha}\left(\int_X |u|^p \, d\mu\right)^{q/p} \\ &\leq \frac{1}{1-2^{-q\sigma}} \|\overrightarrow{g}\|^q_{\ell^\infty(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))} + \frac{1}{1-2^{-q\alpha}} \|u\|^q_{L^p(X,\mu)}, \end{aligned}$$

więc stąd otrzymujemy *v*).

vi) Dowód jest bardzo podobny do dowodu *v*). Z podpunktu *ii*) wynika, że wystarczy pokazać tezę dla $r = \infty$. Niech $u \in M^{\alpha+\sigma}_{p,\infty}(X,d,\mu)$. Z podpunktu *iii*) mamy natomiast, że $M^{\alpha+\sigma}_{p,\infty}(X,d,\mu) = M^{\alpha+\sigma,p}(X,d,\mu)$ z równymi quasi-normami. Weźmy więc dowolny $g \in \mathbb{D}^{\alpha+\sigma}(u) \cap L^p(X,\mu)$ i zdefiniujmy $\overrightarrow{h} = \{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ wzorem

$$h_k(x) = \begin{cases} 2^{-k\sigma} g(x) & \text{dla } k \geq 0, \\ 2^{k\alpha+\alpha}|u(x)| & \text{dla } k < 0. \end{cases}$$

Niech A_u będzie zbiorem miary zero z definicji g. Dla dowolnego $k \geq 0$ i wszystkich $x, y \in X \setminus A_u$ takich, że $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$ zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq [d(x,y)]^{\alpha+\sigma}\Big(g(x) + g(y)\Big) \\ &\leq [d(x,y)]^{\alpha}\, 2^{-k\sigma}\Big(g(x) + g(y)\Big) \\ &= [d(x,y)]^{\alpha}\Big(h_k(x) + h_k(y)\Big). \end{aligned}$$

Z drugiej strony dla $k < 0$ i wszystkich $x, y \in X \setminus A_u$ takich, że $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$ mamy

$$|u(x) - u(y)| \leq 2^{-(k+1)\alpha}\, 2^{(k+1)\alpha}\,(|u(x)| + |u(y)|) \leq [d(x,y)]^{\alpha}\Big(h_k(x) + h_k(y)\Big),$$

co pokazuje, że $\overrightarrow{h} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u)$. Ponadto

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{h}\|^p_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)} &= \int_X \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^q(x)\Big)^{p/q} d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\sum_{k\geq 0} 2^{-kq\sigma} g^q(x) + \sum_{k<0} 2^{k\alpha q+\alpha q}|u(x)|^q\Big)^{p/q} d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\frac{1}{1-2^{-q\sigma}} g^q(x) + \frac{1}{1-2^{-q\alpha}}|u(x)|^q\Big)^{p/q} d\mu(x) \\ &\leq 2^{p/q}\Big(\frac{1}{1-2^{-q\sigma}}\Big)^{p/q}\|g\|^p_{L^p(X,\mu)} + 2^{p/q}\Big(\frac{1}{1-2^{-q\alpha}}\Big)^{p/q}\|u\|^p_{L^p(X,\mu)}, \end{aligned}$$

zatem *vi*) zachodzi.

vii) Niech $u \in \dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i $g \in \mathbb{D}^{\alpha}(u) \cap L^p(X,\mu)$. Biorąc $\overrightarrow{g}(x) = \{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dla $g_k(x) := g(x)$, otrzymujemy

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\int_X g_k^p\, d\mu\Big)^{1/p} = \|g\|_{L^p(X,\mu)}.$$

To kończy dowód stwierdzenia. $\square$

Uwaga 71. *W powyższym stwierdzeniu, podpunkty v) i vi) zachodzą dla dowolnych* $q, r \in (0,\infty]$. *Jednakże jeśli* $r \in (0, q]$, *to z podpunktów i), ii) wynikają silniejsze zanurzenia*

$$N^{\alpha+\sigma}_{p,r}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\alpha+\sigma}_{p,q}(X,d,\mu) \quad \textit{oraz} \quad M^{\alpha+\sigma}_{p,r}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\alpha+\sigma}_{p,q}(X,d,\mu).$$

Rozdział 2

Ciągłe zanurzenia przestrzeni $W_s^{\alpha,p}$

W niniejszym rozdziale zajmiemy się analizą warunków koniecznych i dostatecznych na zachodzenie ciągłych zanurzeń Sobolewa dla przestrzeni Słobodeckiego, zdefiniowanych na przestrzeniach metrycznych z miarą oraz analizą zanurzeń przestrzeni Słobodeckiego w ułamkowe przestrzenie Hajłasza-Sobolewa.

2.1 Zanurzenia Sobolewa

W przypadku gdy $\alpha p < s$, to globalne zanurzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X,\mu)$ wynika z poniższego, głównego rezultatu z pracy [35].

Twierdzenie 72. *[35, twierdzenie 1] Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w σ-skończoną miarę borelowską μ. Załóżmy, że dla pewnych $b,s \in (0,\infty)$*

$$\mu(B(x,r)) \geq \frac{1}{b} r^s \text{ dla } r \in (0,1] \text{ i } x \in X.$$

Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0,\infty)$, które spełniają $\alpha p < s$, istnieje stała $C \in (0,\infty)$ taka, że nierówność

$$\|u\|_{L^{p^*}(X,\mu)} \leq C\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$$

zachodzi dla każdego $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$, gdzie $p^* = sp/(s-\alpha p)$.

Skupimy się więc na zanurzeniach, gdy $\alpha p \geq s$. W przypadku $\alpha p < s$ jako produkt uboczny otrzymamy lokalną wersję powyższego zanurzenia.

Poniższy lemat można czytać jako pewną wersję twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu. Ponieważ ograniczamy się do klasy $\dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$, więc nie musimy zakładać żadnych warunków podwajania na (X,d,μ) (tak jak na przykład w [64, twierdzenie 3.4.3] czy [65, twierdzenie 1.8]).

Lemat 73. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu. Załóżmy, że $u \in \dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ dla pewnych $\alpha, p \in (0,\infty)$. Wówczas istnieje zbiór miary zero $E \subseteq X$ taki, że $\lim_{r\to 0^+} m_u(B(x,r)) = u(x)$ dla wszystkich $x \in X\backslash E$.*

Dowód. Zdefiniujmy następujący zbiór

$$E = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)\backslash\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) = \infty \text{ lub } |u(x)| = \infty \right\}.$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że $\int_{B(x,1)\backslash\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \in L^1(X,\mu)$, a zatem $\mu(E) = 0$. Stąd dla wszystkich $x \in X\backslash E$ i $r \in (0,1]$, nierówność (1.7.3) implikuje

$$\begin{aligned} |u(x) - m_u(B(x,r))|^p &\le 2br^{-s} \int_{B(x,r)} |u(x)-u(y)|^p\, d\mu(y) \\ &= 2br^{-s} \int_{B(x,r)\backslash\{x\}} |u(x)-u(y)|^p\, d\mu(y) \\ &= 2br^{-s} \int_{B(x,r)\backslash\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d(x,y)^{s+\alpha p}\, d\mu(y) \\ &\le 2br^{\alpha p} \int_{B(x,1)\backslash\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y). \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie w powyższym ciągu nierówności dąży do 0 przy $r \to 0^+$. Stąd wynika teza lematu. □

Stwierdzenie 74. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu i ustalmy $\alpha, p \in (0,\infty)$. Dla wszystkich $u \in \dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$, $z \in X$ i $0 < r_1 \le r_2 \le 1 - r_1$ zachodzi*

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \le (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\, r_1^{-s}\Big(r_1^{\alpha p} + r_2^{\alpha p}\Big). \tag{2.1.1}$$

Dowód. Z (1.7.1) dla $E = B(z,r_1)$ i $c = m_u(B(z,r_2))$ oraz nierówności (1.7.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\le 2br_1^{-s}\int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p\, d\mu(x)\\ &\le 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(z,r_2)} |u(x)-u(y)|^p\, d\mu(y)d\mu(x)\\ &\le 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(x,r_1+r_2)\setminus\{x\}} |u(x)-u(y)|^p\, d\mu(y)d\mu(x)\\ &\le 4b^2\frac{(r_1+r_2)^{s+\alpha p}}{r_1^s r_2^s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(x,r_1+r_2)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)d\mu(x)\\ &\le 4b^2[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\frac{(r_1+r_2)^s}{r_2^s}\frac{(r_1+r_2)^{\alpha p}}{r_1^s}\\ &\le 4b^2\, 2^{s+\alpha p}[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\, r_1^{-s}\Big(r_1^{\alpha p}+r_2^{\alpha p}\Big).\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 75. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu i ustalmy $\alpha,p\in(0,\infty)$. Wówczas dla każdego $z\in X$, $0<R\le\frac{2}{3}$, $i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ takich, że $i<j$ oraz wszystkich $u\in\dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ mamy*

$$\left|m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^j}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^i}\Big)\Big)\right| \le A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}R^{\alpha-\frac{s}{p}}\sum_{l=i}^{j-1}2^{l(\frac{s}{p}-\alpha)}, \tag{2.1.2}$$

gdzie $A=(4^{s+1}b^2)^{1/p}(1+2^{\alpha p})^{1/p}$.

Dowód. Ustalmy $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ i niech $r_1=R/2^{l+1}$ oraz $r_2=R/2^l$. Ponieważ $r_1+r_2\le R+R/2\le 1$, więc możemy skorzystać z poprzedniego stwierdzenia. Wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}\left|m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^{l+1}}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^l}\Big)\Big)\right|^p &\le 4b^2\, 2^{s+\alpha p}[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\left(\frac{1}{2^{\alpha p-s}}\frac{R^{\alpha p-s}}{2^{l(\alpha p-s)}}+2^s\frac{R^{\alpha p-s}}{2^{l(\alpha p-s)}}\right)\\ &= 4^{s+1}b^2(1+2^{\alpha p})[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\frac{R^{\alpha p-s}}{2^{l(\alpha p-s)}}.\end{aligned}$$

Ostatecznie, korzystając z nierówności trójkąta, dostajemy

$$\begin{aligned}\left|m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^j}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^i}\Big)\Big)\right| &\le \sum_{l=i}^{j-1}\left|m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^{l+1}}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^l}\Big)\Big)\right|\\ &\le A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}R^{\alpha-\frac{s}{p}}\sum_{l=i}^{j-1}2^{l(\frac{s}{p}-\alpha)}\end{aligned}$$

dla $A=(4^{s+1}b^2)^{1/p}(1+2^{\alpha p})^{1/p}$. □

Twierdzenie 76. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu i ustalmy $\alpha,p\in(0,\infty)$. Wówczas:*

(i) jeśli $\alpha p > s$, to dowolne $u \in \dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ jest równe μ-prawie wszędzie funkcji ciągłej u^* i ponadto dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$, zachodzi

$$\sup_{0<d(x,y)<1/3} \frac{|u^*(x)-u^*(y)|}{d(x,y)^{\alpha-\frac{s}{p}}} \le C[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}; \tag{2.1.3}$$

(ii) jeśli $\alpha p = s$, to istnieją stałe $C_1, C_2 \in (0,\infty)$ takie, że dla każdego $u \in \dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ spełniającego $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} > 0$, zachodzi nierówność

$$⨍_{B(z,R)} \exp\left(\frac{|u(x)-m_u(B(z,R))|}{C_1[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x) \le C_2 \tag{2.1.4}$$

dla dowolnych $R \in (0,1/3]$ i $z \in X$;

(iii) jeśli $\alpha p < s$, to istnieje stała $C \in (0,\infty)$ taka, że dla wszystkich $u \in \dot{W}_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$

$$\left(⨍_{B(z,R)} |u(x)-m_u(B(z,R))|^{p^*} d\mu(x)\right)^{1/p^*} \le CR^{\alpha-\frac{s}{p}} [u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \tag{2.1.5}$$

dla dowolnych $R \in (0,1/3]$ i $z \in X$, gdzie $p^* = sp/(s-\alpha p)$.

Dowód. (*i*) Ustalmy $z \in X$ i $R \in (0,2/3]$. Ponieważ $\alpha p > s$, więc skończoną sumę po prawej stronie nierówności (2.1.2) możemy oszacować przez sumę szeregu zbieżnego. Dla wszystkich $i,j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, spełniających $0 \le i < j$, otrzymujemy

$$\left|m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^i}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^j}\Big)\Big)\right| \le \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \frac{R^{\alpha-\frac{s}{p}}}{2^{i(\alpha-\frac{s}{p})}}, \tag{2.1.6}$$

gdzie $\widetilde{A} = A/(1-2^{s/p-\alpha}) > 0$. Stąd wynika, że $\left\{m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^k}\Big)\Big)\right\}_{k=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc w szczególności jest zbieżny. Jednakże z lematu 73 wiemy, że istnieje zbiór miary zero G taki, że $m_u\Big(B\Big(z,\frac{R}{2^k}\Big)\Big)$ zbiega do $u(z)$ dla $z \in X \setminus G$.

Biorąc $i=0$ w (2.1.6) i przechodząc do granicy z $j \to \infty$ dla $z \in X\setminus G$, dostajemy

$$\left|m_u\Big(B\Big(z,R\Big)\Big) - u(z)\right| \le \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} R^{\alpha-\frac{s}{p}}. \tag{2.1.7}$$

Załóżmy, że $z,w \in X\setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Wówczas (2.1.7) implikuje

$$\begin{aligned}|u(z)-u(w)| &\le |u(z)-m_u(B(z,R))| + |u(w)-m_u(B(w,R))| \\ &\quad + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\ &\le 2\widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p}} + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))|. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Chcemy oszacować ostatni człon w (2.1.8). W tym celu stosujemy dwukrotnie (1.7.3) i dostajemy

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\le \left(2b\,R^{-s} \int_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(w,R)|^p \,d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\le \left(4b^2\,R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x) - u(y)|^p \,d\mu(y)\,d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\le \left(4b^2 3^{s+\alpha p}\,R^{\alpha p - s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)\setminus\{x\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \,d\mu(y)\,d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\le (4b^2 3^{s+\alpha p})^{1/p}\,[u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}\,d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}},
\end{aligned}$$

gdzie ostatnią nierówność mamy dzięki nierówności trójkąta $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,w) + d(w,y) < 3R$. Stąd, wracając do (2.1.8), otrzymujemy

$$|u(z) - u(w)| \le C[u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}\,d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} \tag{2.1.9}$$

dla dowolnych $z, w \in X \backslash G$ takich, że $d(z,w) < 1/3$, gdzie $C = 2\widetilde{A} + (4b^2 3^{s+\alpha p})^{1/p}$.

Teraz pokażemy, że funkcję $u|_{X\backslash G}$ można rozszerzyć do funkcji u^*, która jest ciągła na X i spełnia (2.1.3). Ponieważ miara każdej kuli jest dodatnia, więc stąd wynika, że zbiór $X\backslash G$ jest gęsty w X. Zatem dla $z \in G$, istnieje ciąg $z_n \in X\backslash G$ zbieżny do z. Zatem

$$|u(z_n) - u(z_m)| \le C[u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} d(z_n, z_m)^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Stąd wynika, że ciąg $\{u(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$. Niech $u^*(z)$ oznacza jego granicę, która nie zależy od wyboru ciągu zbieżnego do z. Istotnie, jeśli $\{z_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \{z_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ są dwoma ciągami punktów w $X \setminus G$ zbieżnymi do z i założymy, że

$$u(z_n^1) \to \xi, \text{ oraz } u(z_n^2) \to \eta,$$

to wtedy

$$|\xi - \eta| = \lim_{n\to\infty} |u(z_n^1) - u(z_n^2)| \le \limsup_{n\to\infty} C[u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} d(z_n^1, z_n^2)^{\alpha - \frac{s}{p}} = 0.$$

Dla $x \in X \setminus G$ oznaczmy $u^*(x) = u(x)$. Ustalmy teraz $z, w \in X$ takie, że $d(z,w) < 1/3$. Możemy znaleźć ciągi $z_n, w_n \in X\backslash G$ takie, że $z_n \to z$ oraz $w_n \to w$. Wówczas

$$u(z_n) \to u^*(z), \quad u(w_n) \to u^*(w).$$

Ponieważ $d(z,w) < 1/3$, to dla odpowiednio dużych n będzie zachodzić $d(z_n, w_n) < 1/3$. Wtedy

$$|u^*(z) - u^*(w)| \le |u(z_n) - u^*(z)| + |u(w_n) - u^*(w)| + C[u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}\,d(z_n, w_n)^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Zatem, przechodząc do granicy z $n \to \infty$, ostatecznie otrzymujemy

$$|u^*(z) - u^*(w)| \leq C[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

(ii) Dzięki stwierdzeniu 56 możemy założyć, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = 1$. Ustalmy $z \in X$ oraz $R \in (0, 1/3]$. Z nierówności (2.1.2) otrzymujemy

$$\left| m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^j}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^i}\Big)\Big)\right| \leq A(j-i)$$

dla każdego $x \in B(z,R)$ i wszystkich $0 \leq i \leq j$, gdzie $A = (4^{s+1}b^2)^{1/p}(1+2^{\alpha p})^{1/p}$.

Niech k_0 będzie najmniejszą liczbą całkowitą, która spełnia $2^{k_0 s} \geq bR^{-s}$. Dla wszystkich $k \geq k_0$ mamy

$$\left| m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big) - m_u\Big(B\big(x, R\big)\Big)\right| \leq A(k-k_0). \tag{2.1.10}$$

Ponadto z definicji k_0 wynika, że zachodzi

$$b \leq 2^{k_0 s} R^s < 2^s b. \tag{2.1.11}$$

Teraz dla $k \in \mathbb{Z}$ definiujemy następujące zbiory

$$E_k = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \leq 2^{ks} \right\}.$$

Ponieważ $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = 1$, więc

$$\begin{aligned} 1 &= \int_X \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k\setminus E_{k-1}} 2^{ks}\, d\mu(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}\mu(E_k\setminus E_{k-1}) = 2^s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k\setminus E_{k-1}} 2^{(k-1)s}\, d\mu(x) \\ &\leq 2^s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k\setminus E_{k-1}} \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x) = 2^s. \end{aligned}$$

Zatem zachodzą nierówności

$$1 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}\mu(E_k\setminus E_{k-1}) \leq 2^s. \tag{2.1.12}$$

Teraz dla dowolnego $x \in E_k$, $k \geq k_0$, stosując nierówność (1.7.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| u(x) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big)\right| &\leq \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,R/2^{k-k_0})} |u(x)-u(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,R/2^{k-k_0})\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} R^{2s}\, 2^{-2(k-k_0)s}\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\ &\leq (2b\, 2^{-(k-k_0)s} R^s\, 2^{ks})^{1/p} = (2b\, 2^{k_0 s}\, R^s)^{1/p} < (2^{s+1}b^2)^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Ponadto dla dowolnego $w \in B(z,R)$ mamy

$$
\begin{aligned}
|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\le \left(2b\, R^{-s} \int_{B(z,R)} \Big|u(x) - m_u(B(w,R))\Big|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\le \left(4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\le (4b^2\, 9^s)^{1/p} \left(\iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&= (4b^2\, 9^s)^{1/p}. \qquad (2.1.14)
\end{aligned}
$$

Zatem dla $x \in E_k \cap B(z,R)$, $k \ge k_0$ połączenie nierówności (2.1.10), (2.1.13) oraz (2.1.14) prowadzi do

$$
\begin{aligned}
\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big| &\le \left|u(x) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\
&\quad + \left|m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big) - m_u(B(x,R))\right| \\
&\le (2^{s+1}b^2)^{1/p} + (4b^2\, 9^s)^{1/p} + A(k-k_0) = A(k-k_0) + D, \quad (2.1.15)
\end{aligned}
$$

gdzie $D = (2^{s+1}b^2)^{1/p} + (4b^2\, 9^s)^{1/p}$. Możemy wreszcie oszacować lewą stronę nierówności (2.1.4). Niech $C_1 = A/\widetilde{C}$, gdzie $\exp(\widetilde{C}) = 2^s$ oraz niech $C = \exp\Big(\widetilde{C}D/A\Big)$ i $C_2 = C(1+2^s)$. Wówczas, korzystając z (2.1.11), (2.1.12) oraz (2.1.15), otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\int_{B(z,R)} \exp\left(\frac{1}{C_1}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big|\right) d\mu(x) &\le \int_{B(z,R)\cap E_{k_0}} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A} D\right) d\mu(x) \\
&\quad + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{B(z,R)\cap(E_k\setminus E_{k-1})} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big(A(k-k_0)+D\Big)\right) d\mu(x) \\
&\le C\mu\Big(B(z,R)\cap E_{k_0}\Big) + C\, 2^{-k_0 s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}\mu(E_k\setminus E_{k-1}) \\
&\le C\mu(B(z,R)) + C2^s \frac{1}{b} R^s \le C_2\, \mu(B(z,R)).
\end{aligned}
$$

(*iii*) Dowód jest bardzo podobny do (*ii*). Zakładamy, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = 1$, ustalamy $z \in X$ i $R \in (0, 1/3]$ oraz dla $k \in \mathbb{Z}$ rozważamy zbiory

$$
E_k = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \le 2^{ks} \right\}.
$$

Z założenia $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = 1$ wynika, że zachodzi (2.1.12). Nierówność (2.1.2) implikuje

$$
\left| m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^j}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^i}\Big)\Big)\right| \le AR^{\alpha - \frac{s}{p}} \frac{2^{j(\frac{s}{p}-\alpha)}}{2^{\frac{s}{p}-\alpha} - 1}
$$

dla każdego $x \in B(z,R)$ i wszystkich $0 \le i \le j$, gdzie $A = (4^{s+1}b^2)^{1/p}(1+2^{\alpha p})^{1/p}$.

Niech k_0 będzie najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą $2^{k_0 s} \geq bR^{-s}$. Dla wszystkich $x \in B(z,R)$ i $k \in \mathbb{Z}$ takich, że $k \geq k_0$, zachodzi

$$\left| m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big) - m_u(B(x,R))\right| \leq \widetilde{A}\, R^{\alpha - \frac{s}{p}}\, 2^{k(\frac{s}{p}-\alpha)}\, 2^{k_0(\alpha-\frac{s}{p})}, \tag{2.1.16}$$

gdzie $\widetilde{A} = (4^{s+1}b^2)^{1/p}(1+2^{\alpha p})^{1/p}/(2^{\frac{s}{p}-\alpha}-1)$.

Dla każdego $x \in E_k$ z nierówności (1.7.3) wynika

$$\begin{aligned}
\left| u(x) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big)\right| &\leq \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,R/2^{k-k_0})} |u(x)-u(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,R/2^{k-k_0})\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \Big(R\, 2^{-(k-k_0)}\Big)^{s+\alpha p} d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&\leq (2b\, 2^{-(k-k_0)\alpha p} R^{\alpha p}\, 2^{ks})^{1/p} = (2b)^{1/p}\, 2^{k(\frac{s}{p}-\alpha)}\, (2^{k_0(\alpha p - s)} 2^{k_0 s} R^{\alpha p})^{1/p} \\
&< (2^{s+1}b^2)^{1/p}\, R^{\alpha-\frac{s}{p}}\, 2^{k(\frac{s}{p}-\alpha)}\, 2^{k_0(\alpha-\frac{s}{p})}.
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Ponadto dla każdego $w \in B(z,R)$ mamy

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\leq \left(2b\, R^{-s} \int_{B(z,R)} \Big| u(x) - m_u(B(w,R))\Big|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x)-u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\leq (4b^2\, 3^{s+\alpha p})^{1/p} R^{\alpha-\frac{s}{p}} \left(\iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\leq (4b^2\, 9^s)^{1/p} R^{\alpha-\frac{s}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Korzystając z nierówności (2.1.16), (2.1.17) oraz (2.1.18) dla $x \in E_k \cap B(z,R)$, $k \geq k_0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|u(x) - m_u(B(z,R))| &\leq \left| u(x) - m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\
&\quad + \left| m_u\Big(B\Big(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\Big)\Big) - m_u\Big(B\Big(x,R\Big)\Big)\right| \\
&\leq R^{\alpha-\frac{s}{p}} 2^{k(\frac{s}{p}-\alpha)}\, 2^{k_0(\alpha-\frac{s}{p})}\left((2^{s+1}b^2)^{1/p} + (4b^2\, 9^s)^{1/p} + \frac{(8^{s+1}b^2)^{1/p}}{2^{\frac{s}{p}-\alpha}-1}\right) \\
&= C\, R^{\alpha-\frac{s}{p}}\, 2^{k(\frac{s}{p}-\alpha)}\, 2^{k_0(\alpha-\frac{s}{p})},
\end{aligned}$$

gdzie $C = (2^{s+1}b^2)^{1/p} + \widetilde{A} + (4b^2\, 9^s)^{1/p}$. Ostatecznie dostajemy

$$\begin{aligned}\int_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(z,R))|^{p^*}\, d\mu(x) &\le \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{B(z,R)\cap(E_k\setminus E_{k-1})} C^{p^*} R^{(\alpha-\frac{s}{p})p^*} 2^{ks}\, 2^{-k_0 s}\, d\mu(x) \\ &\quad + \int_{B(z,R)\cap E_{k_0}} C^{p^*} R^{(\alpha-\frac{s}{p})p^*}\, d\mu(x) \\ &\le C^{p^*} R^{(\alpha-\frac{s}{p})p^*}\, 2^{-k_0 s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k\setminus E_{k-1}) \\ &\quad + C^{p^*} R^{(\alpha-\frac{s}{p})p^*} \mu\Big(B(z,R)\cap E_{k_0}\Big) \\ &\le C^{p^*} (2^s+1) R^{(\alpha-\frac{s}{p})p^*}\, \mu(B(z,R)),\end{aligned}$$

gdzie $p^* = sp/(s-\alpha p)$. □

Wykorzystując całą quasi-normę przestrzeni $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$, możemy wzmocnić tezę twierdzenia 76 (i).

Twierdzenie 77. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu i niech $\alpha, p \in (0,\infty)$ spełniają $\alpha p > s$. Wówczas istnieje $\widetilde{C} \in (0,\infty)$ takie, że dla każdego $u \in W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$*

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha-\frac{s}{p}}(X,d)} \le \widetilde{C}\, \|u\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)},$$

gdzie u^* jest ciągłym reprezentantem u.

Dowód. Z twierdzenia 76 i) wiemy, że u jest równe prawie wszędzie funkcji ciągłej u^*, która spełnia

$$|u^*(z) - u^*(w)| \le C\, [u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}\, d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p}} \tag{2.1.19}$$

dla $z, w \in X$ takich, że $d(z,w) < 1/3$.

Ustalmy $z \in X$. Możemy znaleźć $w \in B(z,1/3)$ takie, że

$$|u^*(w)| \le \left(\frac{1}{\mu(B(z,1/3))} \int_{B(z,1/3)} |u^*(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/p} \le b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}}\, \|u\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Korzystając z (2.1.19), otrzymujemy

$$\begin{aligned}|u^*(z)| \le |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| &\le C\, [u]_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}\, d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}}\, \|u\|_{L^p(X,\mu)} \\ &\le C'\, \|u\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)},\end{aligned}$$

gdzie $C' = \max\{C\, 3^{\frac{s}{p}-\alpha}, b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}}\}$. Stąd wynika

$$\|u^*\|_{C(X,d)} \le C'\, \|u\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}.$$

Pozostało nam pokazać, że (2.1.19) zachodzi również, gdy $d(z,w) \geq 1/3$. Wynika to z poniższego rachunku

$$\begin{aligned}|u^*(z) - u^*(w)| &\leq 2\,\|u^*\|_{C(X,d)} \\ &= 2\,3^{\alpha-\frac{s}{p}}\|u^*\|_{C(X,d)}\,3^{\frac{s}{p}-\alpha} \\ &\leq 2\,3^{\alpha-\frac{s}{p}}C'\,\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\,d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p}}.\end{aligned}$$

Stąd teza zachodzi dla $\widetilde{C} = 2\cdot 3^{\alpha-\frac{s}{p}}\max\{C\,3^{\frac{s}{p}-\alpha}, b^{1/p}3^{\frac{s}{p}}\} = 2\max\{C, b^{1/p}\,3^{\alpha}\}$. □

Podobnie jak w twierdzeniu 77 chcielibyśmy przy użyciu całej quasi-normy przestrzeni $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ wzmocnić podpunkty (*ii*), (*iii*) twierdzenia 76, tzn. pokazać że teza jest prawdziwa dla wszystkich promieni z przedziału $(0,1]$. Udało się to zrobić przy dodatkowym założeniu na przestrzeń metryczną z miarą. Dla $R,\lambda \in (0,\infty)$ wprowadzamy funkcję

$$K_R(\lambda) = \sup_{x\in X}\,\mu(B(x,R+\lambda)).$$

Uwaga 78. *Jeśli $\mu(X) < \infty$, to dla każdego $R,\lambda \in (0,\infty)$ $K_R(\lambda) \leq \mu(X) < \infty$.*

Stwierdzenie 79. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu. Załóżmy, że dla pewnych $R \in (0,\infty)$ i $\lambda \in (0,2]$ zachodzi $K_R(\lambda) < \infty$. Wówczas dla każdego $z \in X$ istnieje podzbiór $A \subseteq B(z,R)$ taki, że*

$$B(z,R) \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,\lambda) \quad \text{oraz} \quad \#A \leq b2^sK_R(\lambda)/\lambda^s.$$

Dowód. Niech A będzie maksymalnym λ-rozdzielonym zbiorem w $B(z,R)$. Ponieważ (X,d) jest ośrodkowa, więc ze stwierdzenia 34 wynika, że A jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Wówczas

$$B(z,R) \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,\lambda)$$

oraz

$$\begin{aligned}K_R(\lambda) \geq \mu(B(z,R+\lambda)) \geq \mu\Big(\bigcup_{a\in A} B(a,\lambda)\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{a\in A} B(a,\lambda/2)\Big) \\ = \sum_{a\in A}\mu(B(a,\lambda/2)) \geq \tfrac{1}{b}(\lambda/2)^s\#A.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy drugą część tezy. □

Twierdzenie 80. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu. Ustalmy $\alpha,p \in (0,\infty)$ spełniające $\alpha p \geq s$. Załóżmy, że $K_1(\lambda) < \infty$ dla pewnej $\lambda \in (0,\infty)$. Wówczas:*

(i) jeśli $\alpha p = s$, to istnieją stałe $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2} \in (0,\infty)$ takie, że dla każdego niezerowego $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ zachodzi

$$\fint_{B(z,R)} \exp\left(\frac{|u(x) - m_u(B(z,R))|}{\widetilde{C_1}\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x) \leq \widetilde{C_2} \tag{2.1.20}$$

dla dowolnych $z \in X$ i $R \in (0,1]$;

(ii) jeśli $\alpha p < s$, to istnieje stała $\widetilde{C} \in (0,\infty)$ taka, że dla każdego $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ zachodzi nierówność

$$\left(\fint_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(z,R))|^{p^*} d\mu(x)\right)^{1/p^*} \leq \widetilde{C} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \tag{2.1.21}$$

dla dowolnych $z \in X$ i $R \in (0,1]$, gdzie $p^* = sp/(s - \alpha p)$.

Dowód. Mając na uwadze twierdzenie 76, bez utraty ogólności możemy założyć, że[4] $R \in (1/3, 1]$ oraz $\lambda \in (0, 1/3]$. Ze stwierdzenia 79 istnieje zbiór $A \subseteq B := B(z,R)$ taki, że

$$B(z,R) \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,\lambda) \quad \text{oraz} \quad \#A \leq b2^s K_1(\lambda)/\lambda^s. \tag{2.1.22}$$

(i) Niech C_1, C_2 będą stałymi z twierdzenia 76 (ii). Stosując nierówność trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_B \exp\left(\frac{|u(x) - m_u(B)|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x) &\leq \sum_{a\in A}\int_{B(a,\lambda)} \exp\left(\frac{|u(x) - m_u(B)|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x) \\ \leq \sum_{a\in A}\int_{B(a,\lambda)} \exp\left(\frac{|u(x) - m_u(B(a,\lambda))|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) &\exp\left(\frac{|m_u(B(a,\lambda)) - m_u(B))|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right) d\mu(x).\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Ostatni wyraz jesteśmy w stanie skontrolować, ponieważ

$$\begin{aligned}|m_u(B(a,\lambda)) - m_u(B(z,R))| &\leq \left(4b^2\lambda^{-s}R^{-s}\int_{B(a,\lambda)}\int_{B(z,R)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)d\mu(x)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(4b^2\lambda^{-s}R^{-s}2^p\int_{B(a,\lambda)}\int_{B(z,R)} |u(x)|^p + |u(y)|^p \, d\mu(y)d\mu(x)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(4b^2\lambda^{-s}3^s2^p\Big(\mu(B(z,R)) + \mu(B(a,\lambda))\Big)\|u\|^p_{L^p(X,\mu)}\right)^{1/p} \\ &\leq D\|u\|_{L^p(X,\mu)},\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

[4] W twierdzeniu 76 (ii) zakładamy, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} > 0$. Jeśli $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = 0$ i $\|u\|_{L^p(X,\mu)} > 0$, to w przypadku (i) dla $R \in (0, 1/3]$ przy pomocy (1.7.3) łatwo można pokazać, że dla wszystkich $z \in X$ u jest równe $m_u(B(z,R))$ μ-prawie wszędzie na $B(z,R)$. Więc (2.1.20) zachodzi w tym przypadku dla dowolnego $C \in (0,\infty)$.

gdzie $D = (b^2\lambda^{-s}3^s2^{p+3}K_1(\lambda))^{1/p}$. Ostatecznie, stosując (2.1.22), (2.1.23), (2.1.24) oraz twierdzenie 76 (*ii*), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_B \exp\left(\frac{|u(x)-m_u(B)|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}}\right)d\mu(x) &\le \sum_{a\in A} C_2\,\mu(B(a,\lambda))\exp\left(\frac{D}{C_1}\right)\\ &\le b3^sC_2\exp\left(\frac{D}{C_1}\right)\sum_{a\in A}K_1(\lambda)\,\mu(B(z,R))\\ &= b3^sC_2\exp\left(\frac{D}{C_1}\right)K_1(\lambda)\#A\,\mu(B(z,R))\\ &\le \widetilde{C_2}\,\mu(B(z,R)),\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{C_2} = b3^sC_2\exp\left(\frac{D}{C_1}\right)K_1(\lambda)\#A$.

(*ii*) Z nierówności trójkąta, twierdzenia 76 (*iii*), (2.1.22) oraz (2.1.24) dostajemy

$$\begin{aligned}\int_B |u(x)-m_u(B)|^{p^*}\,d\mu(x) &\le \sum_{a\in A}2^{p^*}\int\limits_{B(a,\lambda)}|u(x)-m_u(B(a,\lambda))|^{p^*}d\mu(x)\\ &+\sum_{a\in A}2^{p^*}\int\limits_{B(a,\lambda)}|m_u(B(a,\lambda))-m_u(B(z,R))|^{p^*}\,d\mu(x)\\ &\le \sum_{a\in A}2^{p^*}C^{p^*}\lambda^{-s}[u]^{p^*}_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\mu(B(a,\lambda))\\ &+\sum_{a\in A}2^{p^*}D^{p^*}\|u\|^{p^*}_{L^p(X,\mu)}\mu(B(a,\lambda))\\ &\le \frac{b2^sK_1^2(\lambda)}{\lambda^s}\left(2^{p^*}C^{p^*}\lambda^{-s}[u]^{p^*}_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}+2^{p^*}D^{p^*}\|u\|^{p^*}_{L^p(X,\mu)}\right)\\ &\le \frac{b2^sK_1^2(\lambda)}{\lambda^s}\left(2^{p^*}C^{p^*}\lambda^{-s}+2^{p^*}D^{p^*}\right)\frac{\frac{1}{b}R^s}{\frac{1}{b}R^s}\|u\|^{p^*}_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\\ &\le \widetilde{C}^{p^*}R^{-s}\mu(B(z,R))\|u\|^{p^*}_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)},\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{C} = \left(b2^sK_1^2(\lambda)\left(2^{p^*}C^{p^*}\lambda^{-s}+2^{p^*}D^{p^*}\right)/\lambda^s\right)^{1/p^*}$. □

2.2 Oszacowanie normy funkcji wycinającej

Zajmiemy się teraz analizą warunków koniecznych na zachodzenie zanurzeń Sobolewa. Kluczową rolę odegra poniższy lemat, udowodniony w pracy [108] w przypadku euklidesowym oraz w pracy [51] w przypadku przestrzeni Słobodeckiego, zdefiniowanych poprzez całkowanie na pełnym produkcie[5]. Dla $z \in X$ i dwóch promieni spełniających

[5] Na mocy uwagi 62, wyniki zaprezentowane w podrozdziałach 2.2-2.3 są ogólniejsze od wyników pochodzących z artykułu [51].

$0 < r < R \leq 1$, wprowadzamy następującą funkcję wycinającą

$$\Phi_{r,R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in B(z,r), \\ \frac{R-d(x,z)}{R-r} & \text{dla } x \in B(z,R)\backslash B(z,r), \\ 0 & \text{dla } x \in X\backslash B(z,R). \end{cases}$$

Lemat 81. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry i niech $b \in (0,\infty)$ będzie stałą z nierówności (1.2.1). Dla każdego $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ istnieje stała $C_1 = C_1(\alpha, s, p, b) \in (0,\infty)$ taka, że dla wszystkich $0 < r < R \leq 1$ i $z \in X$ mamy*

$$\|\Phi_{r,R}\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} \leq C_1 \frac{\mu(B(z,R))^{\frac{1}{p}}}{(R-r)^{\alpha}}. \tag{2.2.1}$$

Dowód. Ponieważ $\Phi_{r,R} \leq \chi_{B(z,R)}$ oraz $R \leq 1$, stąd

$$\|\Phi_{r,R}\|_{L^p(X,\mu)} \leq \frac{\mu(B(z,R))^{\frac{1}{p}}}{(R-r)^{\alpha}}.$$

W takim razie wystarczy oszacować quasi-półnormę Słobodeckiego. Z s-regularności z góry miary μ wynika, że zbiór $\{(x,x) : x \in X\}$ ma miarę produktową równą zero, więc nie musimy go uwzględniać przy szacowaniu quasi-półnormy. Skoro $\Phi_{r,R} = 0$ na $X \setminus B(z,R)$, to korzystając z Twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
[\Phi_{r,R}]^p_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} &= \iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|\Phi_{r,R}(x) - \Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&= \int_X \int_{X\backslash B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&+ \int_X \int_{B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x) - \Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&= \int_{B(z,R)} \int_{X\backslash B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&+ \int_{X\backslash B(z,R)} \int_{B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&+ \int_{B(z,R)} \int_{B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x) - \Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&= 2\int_{B(z,R)} \int_{X\backslash B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&+ \int_{B(z,R)} \int_{B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x) - \Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&= H_1 + H_2.
\end{aligned}$$

Dla każdego $x \in B(z,R)$ mamy $X \backslash B(z,R) \subseteq X \backslash B(x, R-d(x,z))$, zatem

$$\int_{X\backslash B(z,R)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y) \leq \int_{B(x,1)\backslash B(x,R-d(x,z))} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y).$$

Ustalmy $\xi \in [0,R)$. Jeśli $R-\xi<1$, to istnieje liczba naturalna $k_0 \geq 1$, która spełnia

$$2^{-k_0} \leq R-\xi < 2^{-k_0+1}.$$

Wówczas s-regularność z góry implikuje

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,1)\backslash B(x,R-\xi)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) &\leq \int_{B(x,1)\backslash B(x,2^{-k_0})} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \\
&= \sum_{k=1}^{k_0} \int_{B(x,2^{-k+1})\backslash B(x,2^{-k})} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \\
&\leq 2^s b \sum_{k=1}^{k_0} \frac{2^{-ks}}{2^{-k(s+\alpha p)}} = 2^s b \sum_{k=1}^{k_0} 2^{k\alpha p} \\
&\leq \frac{2^s b}{1-2^{-\alpha p}} 2^{k_0 \alpha p} \leq \frac{2^{s+\alpha p} b}{1-2^{-\alpha p}} \frac{1}{(R-\xi)^{\alpha p}}.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Natomiast jeśli $R-\xi=1$, to powyższa nierówność również zachodzi, gdyż $B(x,1) \setminus B(x,R-\xi)=\emptyset$, więc lewa strona jest równa zero, a prawa jest dodatnia. Korzystając z powyższego oszacowania dla $\xi = d(x,z)$ i monotoniczności odwzorowań $t \mapsto (R-t)^{-\alpha p}$, $t \mapsto (R-t)^{p-\alpha p}$ dla $t \in (0,R)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
H_1 &\leq \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \int_{B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)|^p}{(R-d(x,z))^{\alpha p}}\, d\mu(x) \\
&= \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \int_{B(z,r)} \frac{1}{(R-d(x,z))^{\alpha p}}\, d\mu(x) \\
&+ \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \int_{B(z,R)\backslash B(z,r)} \left(\frac{R-d(x,z)}{R-r}\right)^p \frac{1}{(R-d(x,z))^{\alpha p}}\, d\mu(x) \\
&\leq \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \frac{\mu(B(z,r))}{(R-r)^{\alpha p}} + \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \frac{\mu(B(z,R)\backslash B(z,r))}{(R-r)^{\alpha p}} \\
&= \frac{2^{s+\alpha p+1} b}{1-2^{-\alpha p}} \frac{\mu(B(z,R))}{(R-r)^{\alpha p}}.
\end{aligned}$$

Teraz zajmiemy się całką H_2. Rozbijamy ją, w następujący sposób

$$\begin{aligned}
H_2 &= \int_{B(z,R)} \int_{B(x,R-r)\cap B(z,R)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)-\Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) d\mu(x) \\
&+ \int_{B(z,R)} \int_{B(z,R)\backslash B(x,R-r)} \frac{|\Phi_{r,R}(x)-\Phi_{r,R}(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \chi_{B(x,1)}(y)\, d\mu(y) d\mu(x) \\
&= H_{2,1} + H_{2,2}.
\end{aligned}$$

W celu oszacowania całki $H_{2,1}$ będziemy musieli odpowiednio skontrolować wielkość $\int_{B(x,R-r)} 1/d(x,y)^{s+\alpha p-p}\, d\mu(y)$. W tym celu rozważamy dwa przypadki.
Jeśli $s+\alpha p-p \leq 0$, to natychmiast z monotoniczności i górnej s-regularności mamy

$$\int_{B(x,R-r)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p-p}}\, d\mu(y) \leq b(R-r)^{p-\alpha p}.$$

Natomiast jeśli $s+\alpha p-p>0$, to z s-regularności z góry miary μ dostajemy

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,R-r)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p-p}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{-k}(R-r))\setminus B(x,2^{-(k+1)}(R-r))} \left(2^{-(k+1)}(R-r)\right)^{-s-\alpha p+p} d\mu(y) \\
&\leq b2^{s+\alpha p-p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k}(R-r)\right)^{p-\alpha p} = \frac{b}{2^{p-\alpha p-s}-2^{-s}}(R-r)^{p-\alpha p}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\Phi_{r,R}$ jest funkcją lipszycowską ze stałą $1/(R-r)$, więc otrzymujemy

$$\begin{aligned}
H_{2,1} &\leq \int_{B(z,R)} \int_{B(x,R-r)\cap B(z,R)} \frac{1}{(R-r)^p} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p-p}}\, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leq \max\left\{\frac{b}{2^{p-\alpha p-s}-2^{-s}}, b\right\} \frac{\mu(B(z,R))}{(R-r)^{\alpha p}}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony nierówność (2.2.2) dla $\xi = r$ implikuje

$$\int_{B(x,1)\setminus B(x,R-r)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \leq \frac{2^{s+\alpha p} b}{1-2^{-\alpha p}}(R-r)^{-\alpha p}.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}
H_{2,2} &\leq \int_{B(z,R)} \int_{B(x,1)\setminus B(x,R-r)} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leq \frac{2^{s+\alpha p} b}{1-2^{-\alpha p}} \frac{\mu(B(z,R))}{(R-r)^{\alpha p}},
\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. $\square$

2.3 Warunki konieczne dla miar s-regularnych z góry

Twierdzenie 82. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry i niech $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$, $q \in (p,\infty)$ będą ustalone. Załóżmy, że istnieje stała $C \in (0,\infty)$ taka, że dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ zachodzi*

$$\|u\|_{L^q(X,\mu)} \leq C\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}. \tag{2.3.1}$$

Wówczas μ jest $\frac{\alpha pq}{q-p}$-regularna z dołu.

Poniższy dowód opiera się na metodach pochodzących z prac [75, 4].

Dowód. Ustalmy $z \in X$, $r \in (0,1]$ i dla $j \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$r_j = (2^{-j-1} + 2^{-1})r.$$

Ponadto dla $j \in \mathbb{N}$ wprowadzamy oznaczenie $B_j = B(z, r_j)$ i $u_j = \Phi_{r_{j+1}, r_j}$. Łącząc oszacowania (2.2.1) oraz (2.3.1), otrzymujemy

$$\|u_j\|_{L^q(X,\mu)} \leq C_1 C\, 2^{\alpha(j+2)} \frac{\mu(B_j)^{\frac{1}{p}}}{r^\alpha}.$$

Z drugiej strony ponieważ $u_j \geq \chi_{B_{j+1}}$, to mamy

$$\|u_j\|_{L^q(X,\mu)} \geq \mu(B_{j+1})^{\frac{1}{q}}.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\mu(B_{j+1})^{\frac{1}{q}} \leq \frac{4^\alpha C_1 C}{r^\alpha}\, 2^{\alpha j} \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}.$$

Korzystając z lematu 53 dla

$$a_j = \mu(B_j),\ \rho = \frac{4^\alpha C_1 C}{r^\alpha},\ \tau = 2^\alpha,\ a = \mu(B(z, r/2)) \text{ oraz } b = \mu(B(z,r)),$$

otrzymujemy

$$\mu\Big(B(z, \tfrac{3}{4}r)\Big)^{1-\frac{p}{q}} \frac{4^{\alpha p} C_1^p C_2^p}{r^{\alpha p}}\, 2^{\frac{\alpha p q}{q-p}} \geq 1.$$

Stąd dostajemy

$$\mu(B(z,r)) \geq \mu\Big(B(z, \tfrac{3}{4}r)\Big) \geq \widetilde{C} r^{\frac{\alpha p q}{q-p}},$$

gdzie

$$\widetilde{C} = (4^\alpha C_1 C 2^{\frac{\alpha q}{q-p}})^{\frac{pg}{p-q}}.$$

□

W poniższym twierdzeniu wielkość $[u]_{C^{0,0}(X,d)}$ rozumiemy jako $\sup\limits_{x,y\in X} |u(x) - u(y)|$.

Twierdzenie 83. *Niech (X, d, μ) będzie lokalnie jednostajnie doskonałą przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry. Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $\beta \in [0,\infty)$. Załóżmy, że istnieje stała $C \in (0,\infty)$ taka, że*

$$[u]_{C^{0,\beta}(X,d)} \leq C\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \tag{2.3.2}$$

dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$. Wówczas μ jest $p(\alpha-\beta)$-regularna z dołu.

Dowód. Z założenia (2.3.2) i lematu 81 wynika

$$\left[\Phi_{\tilde{R},R}\right]_{C^{0,\beta}(X,d)} = \sup_{x,y\in X,\, x\neq y} \frac{|\Phi_{\tilde{R},R}(x) - \Phi_{\tilde{R},R}(y)|}{d(x,y)^\beta} \leq C_1 C\, \frac{\mu(B(z,R))^{\frac{1}{p}}}{(R-\tilde{R})^\alpha}$$

dla $0 < \tilde{R} < R \leq 1$. Ustalmy $r \in (0,1]$ i weźmy $\lambda \in (0,1)$, która spełnia warunek lokalnej jednostajnej doskonałości. Niech $y \in B(z,r)\backslash B(z,\lambda r)$, $x = z$ i połóżmy $\tilde{R} = \lambda^2 r, R = \lambda r$. Wówczas mamy

$$1 = \left|\Phi_{\tilde{R},R}(x) - \Phi_{\tilde{R},R}(y)\right| \leq C_1 C\, \frac{\mu(B(z,\lambda r))^{\frac{1}{p}}}{(\lambda-\lambda^2)^\alpha r^\alpha} \lambda^\beta r^\beta$$

i stąd

$$\mu(B(z,r)) \geq \mu(B(z,\lambda r)) \geq \widetilde{C} r^{p(\alpha-\beta)},$$

gdzie

$$\widetilde{C} = \left(\frac{(\lambda-\lambda^2)^\alpha}{\lambda^\beta C_1 C}\right)^p.$$

□

Twierdzenie 84. *Niech (X,d,μ) będzie lokalnie jednostajnie doskonałą przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry. Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $\gamma \in (0,\infty)$. Przypuśćmy, że istnieją stałe $C_2, C_3 \in (0,\infty)$ takie, że dla każdego niezerowego $u \in W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ oraz wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$, mamy nierówność*

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{B(z,r)} \exp\left(C_2\, \frac{|u(x)-c|}{\|u\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}}\right)^\gamma d\mu \leq C_3\, \mu(B(z,r)). \tag{2.3.3}$$

Wówczas μ jest αp-regularna z dołu.

Dowód. Bez utraty ogólności możemy założyć, że (X,d) jest λ-lokalnie jednostajnie doskonała dla $\lambda \in (0,1/5)$. Na mocy lematu 52, wystarczy pokazać nierówność (1.2.2) dla $z \in X$ i promieni $r \in (0,1]$ spełniających nierówność

$$r \leq \frac{3}{\lambda^2}\phi_z(r). \tag{2.3.4}$$

Ustalmy więc $z \in X$ i $r \in (0,1]$ takie, że (2.3.4) zachodzi i oznaczmy $B = B(z,r)$. Niech $r_j = (2^{-j-1} + 2^{-1})\phi_z(r)$, $B_j = B(z,r_j)$ oraz $u_j = \Phi_{r_{j+1},r_j}$. Wówczas, łącząc oszacowanie (2.2.1) z (2.3.4), otrzymujemy

$$\|u_j\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} \leq C_1 \frac{3^\alpha}{\lambda^{2\alpha}} \frac{2^{\alpha(j+2)}}{r^\alpha} \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3.5}$$

gdzie C_1 jest stałą z (2.2.1). Dla każdego $c \in \mathbb{R}$, na mocy lematu 52 *ii*), nierówność

$$|u_j - c| \geq \frac{1}{2} \tag{2.3.6}$$

zachodzi na pewnym podzbiorze kuli B, który ma miarę co najmniej $\mu(B_{j+1})$. Następnie z (2.3.5), (2.3.6) oraz (2.3.3) wnioskujemy, że

$$\frac{\mu(B_{j+1})}{\mu(B)} \exp\left(C_2 \frac{\frac{1}{2}\lambda^{2\alpha} r^{\alpha}}{C_1\, 3^{\alpha}\, 2^{\alpha(j+2)}\, \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\gamma} \leq C_3. \tag{2.3.7}$$

Bez utraty ogólności, możemy założyć że $C_3 > 1$. Wówczas nierówność (2.3.7) możemy przekształcić do

$$\frac{C_2 \lambda^{2\alpha} r^{\alpha}}{2\, C_1\, 12^{\alpha}\, 2^{\alpha j}\, (\mu(B_j))^{\frac{1}{p}}} \leq \left(\log\left(C_3 \frac{\mu(B)}{\mu(B_{j+1})}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.3.8}$$

Weźmy dowolne $q > p/\gamma$. Z elementarnej nierówności $\log y \leq q y^{\frac{1}{q}}$, która zachodzi dla wszystkich $y, q > 0$, otrzymujemy

$$\left(\log\left(C_3 \frac{\mu(B)}{\mu(B_{j+1})}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq q^{\frac{1}{\gamma}} \left(C_3 \frac{\mu(B)}{\mu(B_{j+1})}\right)^{\frac{1}{\gamma q}}. \tag{2.3.9}$$

Połączenie (2.3.8) z (2.3.9) prowadzi do

$$\mu(B_{j+1})^{\frac{1}{\gamma q}} \leq \frac{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 12^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}\, \mu(B)^{\frac{1}{\gamma q}}}{C_2 \lambda^{2\alpha} r^{\alpha}} 2^{\alpha j} \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}.$$

Stosując teraz lemat 53 dla

$$a_j = \mu(B_j),\ \ \rho = \frac{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 12^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}\, \mu(B)^{\frac{1}{\gamma q}}}{C_2 \lambda^{2\alpha} r^{\alpha}},\ \ \tau = 2^{\alpha},\ \ a = \mu(B(z, \lambda^2 r/6)) \text{ oraz } b = \mu(B(z, r)),$$

otrzymujemy

$$1 \leq \mu(B_1)^{1-\frac{p}{\gamma q}} \left(\frac{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 12^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}\, \mu(B)^{\frac{1}{\gamma q}}}{C_2 \lambda^{2\alpha} r^{\alpha}}\right)^{p} 2^{\frac{\alpha p \gamma q}{\gamma q - p}} \leq \mu(B) \left(\frac{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 12^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}}{C_2 \lambda^{2\alpha} r^{\alpha}}\right)^{p} 2^{\frac{\alpha p \gamma q}{\gamma q - p}}$$

i stąd

$$\mu(B(z,r)) \geq r^{\alpha p} \left(\frac{C_2 \lambda^{2\alpha}}{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 12^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{p} 2^{\frac{\alpha p \gamma q}{p - \gamma q}}.$$

Powyższą nierówność otrzymaliśmy dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$ spełniających $r \leq \dfrac{3}{\lambda^2}\phi_z(r)$. Z lematu 52 wynika, że dla wszystkich $z \in X$ i wszystkich $r \in (0,1]$ musi zachodzić

$$\mu(B(z,r)) \geq r^{\alpha p} \left(\frac{C_2 \lambda^{3\alpha}}{2\, C_1 C_3^{\frac{1}{\gamma q}}\, 6^{\alpha}\, q^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{p} 2^{\frac{\alpha p \gamma q}{p - \gamma q}},$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 85. *Niech (X,d,μ) będzie lokalnie jednostajnie doskonałą przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry. Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in (0,\infty)$ i $q \in (p,\infty)$. Załóżmy, że istnieje stała $C_4 \in (0,\infty)$ taka, że dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$, $z \in X$ i $r \in (0,1]$ zachodzi*

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x)-c|^q \, d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C_4 r^\beta \, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}. \tag{2.3.10}$$

Wówczas μ jest $p(\alpha-\beta)$-regularna z dołu.

Dowód. Dowód jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia 84. Możemy założyć, że $\lambda \in (0,1/5)$ i pokażemy nierówność (1.2.2) dla $z \in X$, $r \in (0,1]$ spełniających (2.3.4). Ustalmy więc $z \in X$ i $r \in (0,1]$ spełniające (2.3.4) i oznaczmy $B = B(z,r)$, $r_j = (2^{-j-1}+2^{-1})\phi_z(r)$, $B_j = B(z,r_j)$ oraz $u_j = \Phi_{r_{j+1},r_j}$. Wówczas z lematu 81

$$\|u_j\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \leq C_1 \frac{3^\alpha}{\lambda^{2\alpha}} \frac{2^{\alpha(j+2)}}{r^\alpha} \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3.11}$$

gdzie C_1 jest stałą z (2.2.1). Z lematu 52 *ii*), dla każdego $c \in \mathbb{R}$ nierówność

$$|u_j - c| \geq 1/2$$

zachodzi na pewnym podzbiorze B o mierze równej co najmniej $\mu(B_{j+1})$. Łącząc powyższą nierówność z (2.3.10) oraz (2.3.11), otrzymujemy

$$\mu(B_{j+1})^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2\, C_1\, C_4\, 12^\alpha}{\lambda^{2\alpha}} r^{\beta-\alpha} \mu(B)^{\frac{1}{q}}\, 2^{\alpha j} \mu(B_j)^{\frac{1}{p}}.$$

Korzystając z lematu 53 dla

$$a_j = \mu(B_j),\ \rho = \frac{2\, C_1\, C_4\, 12^\alpha}{\lambda^{2\alpha}} r^{\beta-\alpha} \mu(B)^{\frac{1}{q}},\ \tau = 2^\alpha,\ a = \mu(B(z,\lambda^2 r/6)) \text{ oraz } b = \mu(B(z,r)),$$

otrzymujemy

$$1 \leq \mu(B_1)^{1-\frac{p}{q}} \left(\frac{2C_1C_4 12^\alpha}{\lambda^{2\alpha}} \right)^p r^{p(\beta-\alpha)}\, \mu(B)^{\frac{p}{q}}\, 2^{\frac{\alpha pq}{q-p}}$$

i stąd wynika, że

$$\mu(B(z,r)) \geq \left(\frac{\lambda^{2\alpha}}{2C_1C_4 12^\alpha} \right)^p 2^{\frac{\alpha pq}{p-q}} r^{p(\alpha-\beta)}$$

dla $z \in X$, $r \in (0,1]$ spełniających (2.3.4). Ostatecznie z lematu 52 wynika, że dla dowolnych $z \in X$ i $r \in (0,1]$ zachodzi nierówność

$$\mu(B(z,r)) \geq \left(\frac{\lambda^{3\alpha-\beta} 2^{\alpha-\beta}}{2C_1C_4 12^\alpha} \right)^p 2^{\frac{\alpha pq}{p-q}} r^{p(\alpha-\beta)}.$$

□

2.4 Uwagi o optymalności zanurzeń

Poniższy wniosek pokazuje, że dla miar s-regularnych z góry wykładnik $p^* = \frac{sp}{s-\alpha p}$ w ciągłych zanurzeniach Sobolewa jest optymalny.

Wniosek 86. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry i niech $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$, $q \in (p,\infty)$ spełniają $\alpha p < s$. Jeśli $q > p^* = \frac{sp}{s-\alpha p}$, to*

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \not\hookrightarrow L^q(X,\mu).$$

Ponadto jeśli zachodzi ciągłe zanurzenie

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X,\mu),$$

to μ jest s-regularna.

Dowód. Druga część wynika z twierdzenia 82 dla $q = p^*$, gdyż

$$\frac{\alpha p p^*}{p^* - p} = \frac{\frac{\alpha s p^2}{s-\alpha p}}{\frac{sp}{s-\alpha p} - p} = \frac{\alpha s p}{s - (s - \alpha p)} = s.$$

Przypuśćmy, że $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^q(X,\mu)$ dla $q > p^*$. Z twierdzenia 82 wynika, że możemy znaleźć takie $A > 0$, że

$$Ar^{\tilde{s}} \le \mu(B(x,r)) \le br^s \text{ dla } r \in (0,1],$$

gdzie $\tilde{s} = \frac{\alpha pq}{q-p}$. Ponieważ funkcja $q \mapsto \frac{\alpha pq}{q-p}$ jest malejąca na (p,∞), więc $\tilde{s} < s$. Z powyższej nierówności wynika, że dla $r \in (0,1]$ zachodzi $A/b \le r^{s-\tilde{s}}$. Przechodząc z $r \to 0^+$, otrzymujemy, że $A/b \le 0$, co jest sprzecznością. $\square$

Analogiczny wniosek zachodzi dla zanurzeń w przestrzeń funkcji hölderowsko ciągłych.

Wniosek 87. *Niech (X, d, μ) będzie lokalnie jednostajnie doskonałą przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z góry. Niech $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $\beta \in [0,\infty)$. Jeśli $\beta > \alpha - s/p$, to*

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \not\hookrightarrow C^{0,\beta}(X,d).$$

Ponadto jeśli zachodzi ciągłe zanurzenie

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow C^{0,\alpha-s/p}(X,d),$$

to μ jest s-regularna.

Dowód. Druga część wynika natychmiast z twierdzenia 83, ponieważ

$$p(\alpha - (\alpha - s/p)) = s.$$

Natomiast pierwszą część jest analogiczna do poprzedniego wniosku i wynika z twierdzenia 83 oraz z tego, że dla $\beta > \alpha - s/p$ mamy $p(\alpha - \beta) < s$. □

2.5 Zanurzenia w $M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$

Twierdzenie 88. *Ustalmy $\theta, s \in (0,\infty)$ i niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą θ-regularną dołu. Załóżmy, że $\alpha, p \in (0,\infty)$ spełniają $\alpha p > \theta - s$. Wówczas dla $\beta = \alpha + (s-\theta)/p$ zachodzi ciągłe zanurzenie*

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta,p}(X,d,\mu).$$

Podobny rezultat do powyższego, przy dodatkowych założeniach został pokazany w pracy [21].

Dowód. Niech $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i definiujemy następujący zbiór miary zero

$$G = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) = \infty \text{ lub } |u(x)| = \infty \right\}.$$

Ustalmy $z, w \in X\setminus G$ takie, że $0 < d(z,w) < 1/2$ i niech $r = d(z,w)$. Korzystając z (1.7.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|u(z)-u(w)| &\le |u(z) - m_u(B(z,r)| + |m_u(B(z,r) - u(w)| \\
&\le \left(2br^{-\theta} \int_{B(z,r)} |u(z)-u(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&+ \left(2br^{-\theta} \int_{B(z,r)} |u(w)-u(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&= (2b)^{1/p} r^{-\theta/p} \Bigg[\left(\int_{B(z,r)\setminus\{z\}} |u(z)-u(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{B(z,r)\setminus\{w\}} |u(w)-u(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{1/p} \Bigg] \\
&\le (2b)^{1/p} r^{-\theta/p} \Bigg[\left(\int_{B(z,r)\setminus\{z\}} \frac{|u(z)-u(y)|^p}{d(z,y)^{s+\alpha p}} r^{s+\alpha p}\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{B(w,2r)\setminus\{w\}} \frac{|u(w)-u(y)|^p}{d(w,y)^{s+\alpha p}} (2r)^{s+\alpha p}\, d\mu(y)\right)^{1/p} \Bigg] \\
&\le C d(z,w)^{-\theta/p + s/p + \alpha} \Big(g(z) + g(w) \Big),
\end{aligned}$$

gdzie $C = (2b)^{1/p}(1 + 2^{s/p+\alpha})$ oraz

$$g(x) := \left(\int_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \right)^{1/p} \in L^p(X,\mu).$$

Natomiast jeśli $d(z,w) \geq \frac{1}{2}$, to

$$|u(z) - u(w)| \leq |u(z)| + |u(w)| \leq 2^\beta d(z,w)^\beta \Big(|u(z)| + |u(w)| \Big).$$

Stąd funkcja $h(x) := \max\{Cg(x), 2^\beta |u(x)|\}$ jest β-gradientem Hajłasza funkcji u. Zatem zachodzi ciągłe zanurzenie $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta,p}(X,d,\mu)$. □

Przykład 89. Ustalmy $p \in [1,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ i niech $(X,d,\mu) = (\Omega, |\cdot|, l_n \llcorner \Omega)$, gdzie Ω jest ograniczonym, otwartym i spójnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ o gładkim brzegu, wyposażonym w metrykę euklidesową i miarę Lebesgue'a. Wówczas $M^{\alpha,p}(\Omega) \nsubseteq W^{\alpha,p}_s(\Omega)$ dla $s \geq n + (1-\alpha)p$.

Niniejszy przykład pokazuje, że w twierdzeniu 88 inkluzja w drugą stronę na ogół nie zachodzi. Dla $\alpha = \beta$ mamy natychmiast, że $\theta = s$, więc warunek $\alpha p > \theta - s$ zawsze jest spełniony. Natomiast z założenia o gładkości obszaru wynika, że Ω jest n-regularna z dołu. Ponieważ $s > n$, więc Ω jest również s-regularna z dołu.

Dowód. Dla dowolnego $u \in W^{\alpha,p}_s(\Omega)$ zachodzi

$$\iint\limits_{|x-y|<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{s+\alpha p}} \, dydx \geq \iint\limits_{|x-y|<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+p}} \, dydx.$$

Z rezultatów Brezisa [25] wynika, że $W^{1,p}_n(\Omega)$ składa się tylko z funkcji stałych, zatem $\dim W^{\alpha,p}_s(\Omega) = 1$. Z drugiej strony $M^{\alpha,p}(\Omega)$ jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, ponieważ zawiera funkcje lipszycowskie o ograniczonym nośniku. □

Przykład 90. Niech $\theta \in (2,\infty)$ i zdefiniujmy

$$\Omega(\theta) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0,1) \text{ oraz } |x| < y^{\theta-1} \right\}.$$

Wówczas $(\Omega(\theta), |\cdot|, l_2 \llcorner \Omega(\theta))$ jest θ-regularna z dołu.

Dowód. Ustalmy $r \in (0,1/2]$ i niech $\eta(r) > 0$ spełnia

$$\eta^2(r) + \eta^{2\theta-2}(r) = r^2. \tag{2.5.1}$$

Ponieważ $\theta > 2$ oraz $\eta(r) \in (0,1/2)$, to zachodzi $\eta(r) \geq r/\sqrt{2}$.

Zdefiniujmy teraz następujący zbiór

$$T = \{(s,t) : 0 < t < \eta(r) \text{ oraz } |s| < t^{\theta-1}\}.$$

Z (2.5.1) wynika, że $T \subseteq \Omega(\theta) \cap B((0,0),r)$. Stąd

$$l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((0,0),r)\Big) \geq l_2(T) = \int_0^{\eta(r)} 2y^{\theta-1}dy = \frac{2}{\theta}\eta^\theta(r) \geq \frac{2^{1-\theta/2}}{\theta}r^\theta. \tag{2.5.2}$$

Niech $y \in [0, 1-\eta(r)]$ oraz $x \in [-y^{\theta-1}, y^{\theta-1}]$. Wówczas zachodzi inkluzja

$$T_{x,y} := T + (x,y) \subseteq \Omega(\theta). \tag{2.5.3}$$

Żeby pokazać powyższą inkluzję, przekształćmy definicję zbioru $T_{x,y}$

$$\begin{aligned} T_{x,y} &= \{(x+s, y+t) : 0 < t < \eta(r) \text{ oraz } |s| < t^{\theta-1}\} \\ &= \{(s,t) : y < t < y+\eta(r) \text{ oraz } x-(t-y)^{\theta-1} < s < x+(t-y)^{\theta-1}\}. \end{aligned}$$

Z założeń na y i x wynika, że $(y, y+\eta(r)) \subseteq (0,1)$ oraz $(x-(t-y)^{\theta-1}, x+(t-y)^{\theta-1}) \subseteq (-y^{\theta-1}-(t-y)^{\theta-1}, y^{\theta-1}+(t-y)^{\theta-1})$ dla $t \in (y, y+\eta(r))$. Funkcja $y \mapsto y^{\theta-1}$ jest wypukła oraz przekształca zero na zero, więc dla $a,b \geq 0$ zachodzi[6]

$$a^{\theta-1} + b^{\theta-1} \leq (a+b)^{\theta-1}.$$

Stąd wynika, że dla $t \in (y, y+\eta(r))$ mamy

$$\begin{aligned} y^{\theta-1} + (t-y)^{\theta-1} &\leq t^{\theta-1}, \\ -y^{\theta-1} - (t-y)^{\theta-1} &\geq -t^{\theta-1}. \end{aligned}$$

Zatem dla $t \in (y, y+\eta(r))$ mamy $(x-(t-y)^{\theta-1}, x+(t-y)^{\theta-1}) \subseteq (-t^{\theta-1}, t^{\theta-1})$, więc inkluzja (2.5.3) jest prawdziwa. Korzystając z (2.5.2), otrzymujemy, że dla $r \in (0,1/2]$, $y \in [0, 1-\eta(r)]$ i $x \in [-y^{\theta-1}, y^{\theta-1}]$ zachodzi

$$l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((x,y),r)\Big) \geq l_2(T_{x,y}) = l_2(T) \geq \frac{2^{1-\theta/2}}{\theta}r^\theta. \tag{2.5.4}$$

Zdefiniujmy $\hat{\Omega} = \{(x,y) \in \Omega(\theta) : y \in (0,1/2] \text{ oraz } x \in (-y^{\theta-1}y^{\theta-1})\}$. Ponieważ $\eta(r) \in (0,1/2)$ dla $r \in (0,1/2]$, więc dla $(x,y) \in \hat{\Omega}$ zachodzi (2.5.4). Natomiast zbiór $\widetilde{\Omega} := \Omega(\theta)\setminus\hat{\Omega} = \{(x,y) \in \Omega(\theta) : y \in (1/2,1) \text{ oraz } x \in (-y^{\theta-1}y^{\theta-1})\}$ nie zawiera już osobliwości,

[6] Jeśli ψ jest wypukła oraz $a,b > 0$, to $\psi(a)+\psi(b) = \psi(\frac{a}{a+b}(a+b)) + \psi(\frac{b}{a+b}(a+b)) \leq \psi(a+b)+\psi(0)$. W przypadku gdy a lub b jest równe zero, powyższa nierówność również zachodzi.

więc można pokazać, że spełnia on warunek wewnętrznego stożka. Stąd wynika, że jest 2-regularny z dołu, a skoro $\theta > 2$, więc jest również θ-regularny z dołu. To oznacza, że nierówność

$$l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((x,y),r)\Big) \geq l_2\Big(\tilde{\Omega} \cap B((x,y),r)\Big) \geq Ar^\theta \tag{2.5.5}$$

zachodzi dla pewnej stałej $A \in (0,\infty)$, wszystkich $r \in (0,1/2]$ i wszystkich $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$. Łącząc (2.5.4) z (2.5.5), otrzymujemy, że

$$l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((x,y),r)\Big) \geq \frac{1}{b} r^\theta$$

dla pewnej stałej $b \in (0,\infty)$, dla wszystkich $r \in (0,1/2]$ i wszystkich $(x,y) \in \Omega(\theta)$. Natomiast dla $r \in (1/2,1]$ i $(x,y) \in \Omega(\theta)$ dzięki powyższej nierówności otrzymujemy

$$l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((x,y),r)\Big) \geq l_2\Big(\Omega(\theta) \cap B((x,y),r/2)\Big) \geq \frac{1}{b}\left(\frac{r}{2}\right)^\theta = \frac{1}{2^\theta b} r^\theta.$$

Co pokazuje, że $\Omega(\theta)$ jest θ-regularna z dołu. □

W poniższym lemacie $B(a,b)$ oznacza funkcję beta Eulera, tzn. dla $a,b \in (0,\infty)$

$$B(a,b) = \int_{(0,1)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Lemat 91. *Niech $a,b,c \in \mathbb{R}$ i rozważmy całkę*

$$I(a,b,c) = \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(0,1)} \xi^{a-1}\eta^{b-1}|\xi-\eta|^{c-1} d\eta d\xi.$$

Jeśli $a,b,c > 0$ oraz $a+b+c > 1$, to $I(a,b,c)$ jest skończona i zachodzi wzór

$$I(a,b,c) = \frac{B(a,c)+B(b,c)}{a+b+c-1}.$$

Ponadto jeśli któraś z nierówności $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ czy $a+b+c > 1$ nie zachodzi, to wówczas $I(a,b,c) = \infty$.

Dowód. Możemy przedstawić całkę $I(a,b,c)$ w następującej postaci

$$\begin{aligned}\int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(0,1)} \xi^{a-1}\eta^{b-1}|\xi-\eta|^{c-1}\, d\eta\, d\xi &= \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(0,\xi)} \xi^{a-1}\eta^{b-1}|\xi-\eta|^{c-1}\, d\eta\, d\xi \\ &+ \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(\xi,1)} \xi^{a-1}\eta^{b-1}|\xi-\eta|^{c-1}\, d\eta\, d\xi \\ &= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

W J_1 robimy podstawienie $\eta = \xi t$, natomiast w J_2 korzystamy z twierdzenia Fubiniego oraz podstawienia $\xi = \eta t$. Wówczas otrzymujemy

$$J_1 = \int_{(0,1)} \xi^{a+b+c-2} \int_{(0,1)} t^{b-1}(1-t)^{c-1} dt d\xi,\ J_2 = \int_{(0,1)} \eta^{a+b+c-2} \int_{(0,1)} t^{a-1}(1-t)^{c-1}\, dt d\eta.$$

Stąd natychmiast wynika, że jeśli któryś z warunków $a, b, c > 0$, $a+b+c > 1$ nie jest spełniony, to przynajmniej jedna z powyższych całek jest nieskończona, więc $I(a,b,c)$ również. Natomiast jeśli założymy, że $a, b, c > 0$ oraz $a+b+c > 1$, to natychmiast otrzymujemy, że

$$J_1 = \frac{B(b,c)}{a+b+c-1},\ J_2 = \frac{B(a,c)}{a+b+c-1}.$$

$\square$

Podpunkty (i) oraz (iii) w poniższym przykładzie pokazują istotność założenia $\alpha p > \theta - s$ w twierdzeniu 88. Natomiast podpunkty (ii) oraz (iv) pokazują, że parametru $\beta = \alpha + (s-\theta)/p$ w twierdzeniu 88 w ogólności nie da się poprawić.

Przykład 92. Ustalmy $\theta \in (2,\infty)$ i niech $\Omega(\theta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0,1) \text{ oraz } |x| < y^{\theta-1}\}$. Załóżmy, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(i) $p \in [\theta,\infty)$, $\alpha \in (0, \frac{\theta-2}{p}]$ oraz $\beta \in (0,\infty)$;

(ii) $p \in [\theta,\infty)$, $\alpha \in (\frac{\theta-2}{p}, \frac{\theta-3/2}{p})$ oraz $\beta \in (\alpha + \frac{2-\theta}{p}, \infty)$;

(iii) $p \in (1,\theta)$, $\alpha \in (0, \frac{\theta-2}{p}] \cap (0, \frac{p-1}{p})$ oraz $\beta \in (0,\infty)$;

(iv) $p \in (\theta-1,\theta)$, $\alpha \in (\frac{\theta-2}{p}, \frac{2\theta-2}{p} - 1) \cap (0, \frac{p-1}{p})$ oraz $\beta \in (\alpha + \frac{2-\theta}{p}, \infty)$.

Wówczas $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \nsubseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta))$.

Dowód. W $(i)-(iv)$ zachodzą następujące relacje pomiędzy parametrami:

(i) $0 < \theta/p \leq 1$;

(ii) $\alpha + \frac{2-\theta}{p} < \theta/p \leq 1$;

(iii) $1 < \theta/p$;

(iv) $\alpha + \frac{2-\theta}{p} < 1 < \theta/p$.

Na mocy podpunktów *iii*) oraz *vi*) w stwierdzeniu 70 dla $r = q = \infty$, mamy

$$M^{\beta,p}(\Omega(\theta)) \hookrightarrow M^{\min\{\beta,1,\theta/p\},p}(\Omega(\theta)).$$

Stąd w podpunktach $(i), (iii)$ możemy zakładać

$$\beta \in (0, \min\{1, \theta/p\}).$$

Natomiast w podpunktach $(ii), (iv)$ możemy zakładać

$$\beta \in (\alpha + (2-\theta)/p, \min\{1, \theta/p\}).$$

$\Omega(\theta)$ jest zbiorem ograniczonym, a z przykładu 90 wiemy, że $l_2 \llcorner \Omega(\theta)$ jest θ-regularna z dołu. Stąd

$$M^{\beta,p}(\Omega(\theta)) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega(\theta)), \tag{2.5.6}$$

gdzie $p^* = \frac{\theta p}{\theta - \beta p}$. Wynika to z poniższego, ogólnego argumentu skalującego.

Niech (X, d, μ) będzie ograniczoną przestrzenią metryczną z miarą θ-regularną z dołu dla $\theta \in (0, \infty)$ i załóżmy, że $\beta \in (0, 1]$ oraz $p \in [1, \theta/\beta)$. Wówczas d^β jest metryką na X oraz

$$M^{\beta,p}(X, d, \mu) = M^{1,p}(X, d^\beta, \mu)$$

jako zbiory z równymi normami. Ponadto

$$\mu(B_{d^\beta}(x,r)) = \mu\Big(\{y \in X : d^\beta(x,y) < r\}\Big) = \mu\Big(\{y \in X : d(x,y) < r^{1/\beta}\}\Big) \geq \frac{1}{b} r^{\theta/\beta}.$$

Stąd wynika, że (X, d^β, μ) jest Q-regularna z dołu dla $Q = \theta/\beta$ oraz $p \in [1, Q)$. Korzystając z [54, twierdzenie 6], otrzymujemy

$$M^{1,p}(X, d^\beta, \mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X, \mu),$$

gdzie $p^* = \frac{Qp}{Q-p} = \frac{\theta p/\beta}{\theta/\beta - p} = \frac{\theta p}{\theta - \beta p}$.

Dla $\gamma \in (0, \infty)$ definiujemy funkcję $u : \Omega(\theta) \to \mathbb{R}$ wzorem $u_\gamma(x,y) = 1/y^\gamma$ i niech $q \in (0, \infty)$. Wówczas z twierdzenia Fubiniego

$$\int\limits_{\Omega(\theta)} |u_\gamma(x,y)|^q dl_2(x,y) = \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(-y^{\theta-1}, y^{\theta-1})} y^{-\gamma q}\, dxdy = 2 \int\limits_{(0,1)} y^{\theta-\gamma q-1}\, dy.$$

Stąd wynika, że

$$u_\gamma \in L^q(\Omega(\theta)) \;\Leftrightarrow\; q \in (0, \theta/\gamma). \tag{2.5.7}$$

Natomiast gdyby zachodziła inkluzja

$$W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta)),$$

to z zanurzenia (2.5.6) wynikałoby, że zachodzi inkluzja

$$W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq L^{p^*}(\Omega(\theta)) \tag{2.5.8}$$

dla $p^* = \frac{\theta p}{\theta - \beta p}$. Ponadto gdybyśmy pokazali, że dla pewnych γ, $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$, to z (2.5.7) oraz (2.5.8) musiałaby zachodzić nierówność

$$\frac{\theta p}{\theta - \beta p} < \theta/\gamma,$$

która jest równoważna z

$$\beta < \theta/p - \gamma. \tag{2.5.9}$$

W dalszej części dowodu będziemy próbować otrzymać sprzeczność przy pomocy powyższej nierówności.

Niech $p \in [\theta, \infty)$ i $\gamma \in (0,1]$. Korzystając z nierówności $|t^\gamma - s^\gamma| \le |s-t|^\gamma$ dla $s,t \ge 0$, szacujemy półnormę Słobodeckiego

$$\begin{aligned}
[u_\gamma]^p_{W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))} &\le \int\limits_{\Omega(\theta)}\int\limits_{\Omega(\theta)} \frac{\left|(\frac{1}{y_1})^\gamma - (\frac{1}{y_2})^\gamma\right|^p}{|y_1-y_2|^{2+\alpha p}} dl_2(x_2,y_2)dl_2(x_1,y_1) \\
&= \int\limits_{\Omega(\theta)}\int\limits_{\Omega(\theta)} \frac{\left|y_1^\gamma - y_2^\gamma\right|^p}{y_1^{\gamma p} y_2^{\gamma p}|y_1-y_2|^{2+\alpha p}} dl_2(x_2,y_2)dl_2(x_1,y_1) \\
&\le \int\limits_{\Omega(\theta)}\int\limits_{\Omega(\theta)} y_1^{-\gamma p} y_2^{-\gamma p}|y_1-y_2|^{\gamma p - \alpha p - 2} dl_2(x_2,y_2)dl_2(x_1,y_1) \\
&= 4\int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1}|y_1-y_2|^{\gamma p-\alpha p-2} dy_2 dy_1 \\
&= 4I(\theta-\gamma p, \theta-\gamma p, \gamma p - \alpha p - 1),
\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość zachodzi na mocy lematu 91. Ponadto wielkość

$$I(\theta-\gamma p, \theta-\gamma p, \gamma p - \alpha p - 1)$$

jest skończona, o ile $\gamma < \theta/p$, $\gamma > \alpha + 1/p$ oraz $\gamma < (2\theta - 2)/p - \alpha$. Stąd wynika, że $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$ dla wszystkich

$$\gamma \in \Big(\alpha + 1/p, \min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\}\Big).$$

Przypadek (i). Jeśli $p \in [\theta, \infty)$ oraz $\alpha \in (0, \frac{\theta-2}{p}]$, to

$$\min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\} = \theta/p > \alpha + 1/p.$$

Stąd dla wszystkich $\gamma \in (\alpha + 1/p, \theta/p)$ $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$. Ustalmy $\beta \in (0, \theta/p)$ i przypuśćmy, że zachodzi inkluzja $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta))$. Przechodząc do granicy z $\gamma \nearrow \theta/p$ w (2.5.9), otrzymujemy, że $\beta \le 0$, co jest sprzecznością.

Przypadek (ii). Jeśli $p \in [\theta, \infty)$ oraz $\alpha \in \Big(\frac{\theta-2}{p}, \frac{\theta-3/2}{p}\Big)$, to wówczas

$$\min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\} = (2\theta-2)/p - \alpha > \alpha + 1/p.$$

Stąd dla wszystkich $\gamma \in (\alpha + 1/p, (2\theta-2)/p - \alpha)$ mamy $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$. Ustalmy $\beta \in (\alpha + (2-\theta)/p, \theta/p)$ i przypuśćmy, że zachodzi inkluzja $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta))$. Przechodzimy do granicy z $\gamma \nearrow (2\theta-2)/p - \alpha$ w (2.5.9) i otrzymujemy, że $\beta \le \alpha + (2-\theta)/p$, co jest sprzecznością.

Niech teraz $p \in (1, \theta)$ i $\gamma \in [1, \infty)$. Korzystając z nierówności

$$|t^\gamma - s^\gamma| \le \gamma \max\{s^{\gamma-1}, t^{\gamma-1}\}|s-t| \text{ dla } s, t \ge 0,$$

możemy podobnie jak wcześniej oszacować półnormę u_γ

$$\begin{aligned}
[u_\gamma]^p_{W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))} &\le \int\limits_{\Omega(\theta)}\int\limits_{\Omega(\theta)} \frac{\left|(\frac{1}{y_1})^\gamma - (\frac{1}{y_2})^\gamma\right|^p}{|y_1-y_2|^{2+\alpha p}} dl_2(x_2,y_2)dl_2(x_1,y_1)\\
&= 4\int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1}\frac{|y_1^\gamma - y_2^\gamma|^p}{|y_1-y_2|^{2+\alpha p}} dy_2dy_1\\
&\le 4\gamma^p \int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1}\max\Big\{y_1^{\gamma-1}, y_2^{\gamma-1}\Big\}^p |y_1-y_2|^{p-\alpha p-2}dy_2dy_1\\
&\le 4\gamma^p \int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1}(y_1^{\gamma p-p} + y_2^{\gamma p-p})|y_1-y_2|^{p-\alpha p-2}dy_2dy_1\\
&= 4\gamma^p \int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1}|y_1-y_2|^{p-\alpha p-2}dy_2dy_1\\
&+ 4\gamma^p \int\limits_{(0,1)}\int\limits_{(0,1)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-p-1}|y_2-y_1|^{p-\alpha p-2}dy_2dy_1\\
&= 8\gamma^p\, I(\theta-p, \theta-\gamma p, p-\alpha p-1).
\end{aligned}$$

Na mocy lematu 91, ostatnie wyrażenie jest skończone, jeśli $p - \alpha p > 1$ oraz

$$1 \leq \gamma < \min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\}.$$

Zatem $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$ dla wszystkich

$$\gamma \in \Big[1, \min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\}\Big).$$

Przypadek (iii). Jeśli $p \in (1,\theta)$, $\alpha \in (0, \frac{\theta-2}{p}] \cap (0, \frac{p-1}{p})$, to

$$\min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\} = \theta/p > 1.$$

To oznacza, że dla wszystkich $\gamma \in [1, \theta/p)$, $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$. Ustalmy $\beta \in (0,1]$ i przypuśćmy, że zachodzi inkluzja $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta))$. Tak jak w przypadku (i) przechodzimy do granicy $\gamma \nearrow \theta/p$ w (2.5.9) i otrzymujemy sprzeczność.

Przypadek (iv). Niech $p \in (\theta-1, \theta)$. Stąd wynika, że

$$\frac{\theta-2}{p} < \frac{p-1}{p} \quad \text{oraz} \quad \frac{\theta-2}{p} < \frac{2\theta-2}{p} - 1,$$

więc zbiór $(\frac{\theta-2}{p}, \frac{2\theta-2}{p} - 1) \cap (0, \frac{p-1}{p})$ jest niepusty. Niech $\alpha \in (\frac{\theta-2}{p}, \frac{2\theta-2}{p} - 1) \cap (0, \frac{p-1}{p})$. Wówczas

$$\min\Big\{\theta/p, (2\theta-2)/p - \alpha\Big\} = (2\theta-2)/p - \alpha > 1.$$

Stąd dla wszystkich $\gamma \in [1, (2\theta-2)/p - \alpha)$, $u_\gamma \in W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$. Ustalmy $\beta \in (\alpha + \frac{2-\theta}{p}, 1]$. Zakładając, że zachodzi inkluzja $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta)) \subseteq M^{\beta,p}(\Omega(\theta))$, możemy przejść do granicy $\gamma \nearrow (2\theta-2)/p - \alpha$ w (2.5.9) i otrzymujemy

$$\beta \leq \alpha + (2-\theta)/p,$$

co jest sprzeczne z naszym założeniem na β.

$\square$

Rozdział 3

Zwarte zanurzenia

W niniejszym rozdziale przedstawimy wyniki, dotyczące zwartości zanurzeń przestrzeni Hajłasza-Sobolewa, Hajłasza-Biesowa, Hajłasza-Triebla-Lizorkina i Słobodeckiego w przestrzenie Lebesgue'a. Będziemy korzystać z następującej uwagi, która jest natychmiastową konsekwencją stwierdzenia 70.

Uwaga 93. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską μ. Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow M^{\alpha,p}(X, d, \mu) \quad \textit{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow M^{\alpha/2,p}(X, d, \mu).$$

Stąd wynika, że jeśli dla wszystkich $\alpha \in (0, \infty)$ mamy zwartość zanurzeń dla przestrzeni $M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$, to również mamy zwartość zanurzeń dla przestrzeni $M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$ oraz $N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu)$.

3.1 Zanurzenia w $L^{\tilde{p}}(X, \nu)$ dla $0 \le \tilde{p} < p$

Zaczniemy od pokazania poniższego twierdzenia, dotyczącego zwartości w L^0.

Twierdzenie 94. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą oraz ν niech będzie skończoną miarą borelowską, absolutnie ciągłą względem μ. Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$ i $q \in (0, \infty]$ zanurzenia*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^0(X, \nu) \quad \textit{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^0(X, \nu)$$

są zwarte.

Dowód. Niech $\alpha, p \in (0, \infty)$. Na mocy uwagi 93, wystarczy że pokażemy zwartość zanurzenia $M^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^0(X,\nu)$. Niech $\mathcal{F} \subseteq M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ będzie niepustym, ograniczonym podzbiorem i niech

$$M = \sup_{u \in \mathcal{F}} \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

Bez utraty ogólności możemy założyć, że $M > 0$. Żeby pokazać tezę wystarczy sprawdzić, że spełnione są założenia twierdzenia 48 (możemy skorzystać z twierdzenia 48, ponieważ zakładamy, że μ jest niezdegenerowana, więc na mocy stwierdzenia 14, (X,d) jest ośrodkowa). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dzięki absolutnej ciągłości ν względem μ możemy znaleźć $\eta > 0$ taką, że dla dowolnego zbioru mierzalnego E zachodzi

$$\mu(E) < \eta \implies \nu(E) < \varepsilon.$$

Zdefiniujmy teraz

$$\lambda = M 4^{1/p}/\eta^{1/p} \quad \text{oraz} \quad \delta = \Big(\varepsilon/(2\lambda)\Big)^{1/\alpha}$$

i ustalmy $u \in \mathcal{F}$. Istnieje zbiór mierzalny $A_u \subseteq X$ taki, że $\mu(A_u) = 0$ oraz α-gradient Hajłasza $g \in \mathbb{D}^\alpha(u)$, spełniający $\|g\|_{L^p(X,\mu)} \le \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$[7] oraz

$$|u(x) - u(y)| \le [d(x,y)]^\alpha \Big(g(x) + g(y)\Big) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in X \setminus A_u.$$

W szczególności również $\nu(A_u) = 0$. Definiujemy następujący zbiór

$$E(u) = \Big\{x \in X : \max\Big\{|u(x)|, g(x)\Big\} > \lambda\Big\} \cup A_u.$$

Stosując nierówność Czebyszewa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu(E(u)) &\le \frac{1}{\lambda^p} \int_X \max\{|u(x)|, g(x)\}^p \, d\mu(x) \le \frac{1}{\lambda^p} \int_X |u(x)|^p + g^p(x) \, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\lambda^p} \Big(\|u\|^p_{L^p(X,\mu)} + \|g\|^p_{L^p(X,\mu)}\Big) \\
&\le \frac{2}{\lambda^p} M^p < \frac{4}{\lambda^p} M^p = \eta.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że $\mu(E(u)) < \eta$, więc $\nu(E(u)) < \varepsilon$. Ponadto jasne jest, że warunek (iii) z twierdzenia 48 zachodzi, więc pozostało nam do sprawdzenia, że (ii) również jest spełniony. Niech $x, y \in X \setminus E(u)$ będą takie, że $d(x,y) < \delta$. Wówczas

$$|u(x) - u(y)| \le [d(x,y)]^\alpha \Big(g(x) + g(y)\Big) \le [d(x,y)]^\alpha 2\lambda < \varepsilon,$$

czyli warunek (ii) z twierdzenia 48 również zachodzi. To kończy dowód. $\square$

[7] Jeśli $\|u\|_{L^p(X,\mu)} = 0$, to bierzemy $g = 0$. Natomiast jeśli $\|u\|_{L^p(X,\mu)} > 0$, to $\|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)} > \|u\|_{\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$, więc możemy znaleźć $g \in \mathbb{D}^\alpha(u)$ taki, że $\|g\|_{L^p(X,\mu)} \le \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$.

Wniosek 95. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech $\alpha, p \in (0,\infty)$ oraz $q \in (0,\infty]$ będą ustalone. Załóżmy, że $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym w $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ lub w $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$. Wówczas $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zawiera podciąg zbieżny punktowo μ-prawie wszędzie do pewnej funkcji $u \in L^p(X,\mu)$.*

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$ i rozważmy zbiór

$$A_{x_0} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < 2d(x,x_0)\}.$$

Jest to zbiór otwarty w $X \times X$, więc na mocy lematu 8, jest mierzalny względem miary produktowej. Ponadto z twierdzenia Fubiniego wynika, że funkcja

$$X \ni x \mapsto \int_X \chi_{A_{x_0}}(x,y)d\mu(y) = \mu(B(x, 2d(x,x_0)))$$

jest mierzalna. Niech ν będzie miarą daną przez

$$\nu(A) = \int_A \frac{1}{1 + d(x,x_0)\mu(B(x_0, 2d(x,x_0)))}\, d\mu(x)$$

dla każdego zbioru mierzalnego $A \subseteq X$. Jasne jest, że ν jest absolutnie ciągła względem μ. Natomiast funkcja pod całką jest dodatnia wszędzie, więc również $\mu << \nu$. Ponadto ν jest skończona, ponieważ

$$\begin{aligned}
\nu(X) &= \int_X \frac{1}{1 + d(x,x_0)\mu(B(x_0, 2d(x,x_0)))}\, d\mu(x) \\
&= \int_{B(x_0,1)} \frac{1}{1 + d(x,x_0)\mu(B(x_0, 2d(x,x_0)))}\, d\mu(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x_0,2^{k+1})\setminus B(x_0,2^k)} \frac{1}{1 + d(x,x_0)\mu(B(x_0, 2d(x,x_0)))}\, d\mu(x) \\
&\le \mu(B(x_0,1)) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x_0,2^{k+1})\setminus B(x_0,2^k)} \frac{1}{1 + 2^k\mu(B(x_0, 2^{k+1}))}\, d\mu(x) \\
&\le \mu(B(x_0,1)) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(B(x_0,2^{k+1}))}{1 + 2^k\mu(B(x_0, 2^{k+1}))} \le \mu(B(x_0,1)) + 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Zatem korzystając z twierdzenia 94, możemy wybrać z ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podciąg zbieżny w $L^0(X,\nu)$ do pewnego $u \in L^0(X,\nu)$, a nawet zbieżny ν-prawie wszędzie. Z absolutnej ciągłości μ względem ν wynika, że jest to również zbieżność μ-prawie wszędzie. Natomiast $u \in L^p(X,\mu)$, na mocy lematu Fatou. □

Przy pomocy twierdzenia 94 pokażemy teraz następujący wynik, dotyczący zanurzeń w przestrzenie Lebesgue'a z niższym wykładnikiem. Co ciekawe, żadna z rozważanych przez nas miar nie musi być skończona.

Twierdzenie 96. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie miarą borelowską, absolutnie ciągłą względem μ, taką że $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$ dla pewnej $\theta \in (1,\infty)$, gdzie $\theta' = \theta/(\theta-1)$. Wówczas dla $\alpha, p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ zanurzenia*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p/\theta}(X,\nu) \quad \textit{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p/\theta}(X,\nu) \tag{3.1.1}$$

są zwarte.

Dowód. Tak jak poprzednio, dzięki uwadze 93 wystarczy pokazać tezę dla przestrzeni $M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$. Niech $\mathcal{F}$ będzie ograniczoną rodziną w $M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$. Dla każdego $u \in \mathcal{F}$ i każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq X$ z nierówności Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_D |u(x)|^{p/\theta}\, d\nu(x) &= \int_D |u(x)|^{p/\theta} \frac{d\nu}{d\mu}(x)\, d\mu(x) \\ &\le \|u\|^{p/\theta}_{L^p(X,\mu)} \left(\int_D \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|^{\theta'} (x) d\mu(x) \right)^{1/\theta'}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$, więc możemy znaleźć $x_0 \in X$ oraz odpowiednio duże $\lambda > 0$ i $R > 0$ takie, że dla wszystkich $u \in \mathcal{F}$

$$\int_{X\setminus B(x_0,R)} |u(x)|^{p/\theta}\, d\nu(x) < \frac{\varepsilon^{p/\theta}}{3} \quad \text{oraz} \quad \int_{E_\lambda} |u(x)|^{p/\theta}\, d\nu(x) < \frac{\varepsilon^{p/\theta}}{3}, \tag{3.1.3}$$

gdzie $E_\lambda = \{x \in X : \frac{d\nu}{d\mu}(x) > \lambda\}$. Rozważmy miarę $\tilde{\nu} := \nu \llcorner \Big(B(x_0,R) \cap (X \setminus E_\lambda)\Big)$, która jest absolutnie ciągła względem μ. $\tilde{\nu}$ jest skończona, ponieważ

$$\tilde{\nu}(X) = \nu(B(x_0,R) \cap (X \setminus E_\lambda)) = \int_{B(x_0,R)\cap(X\setminus E_\lambda)} \frac{d\nu}{d\mu}(x) d\mu(x) \le \lambda \mu(B(x_0,R)) < \infty.$$

Ponadto z (3.1.2) wynika, że dla każdego $u \in \mathcal{F}$ i każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq X$ mamy

$$\begin{aligned} \int_D |u(x)|^{p/\theta}\, d\tilde{\nu}(x) &\le \|u\|^{p/\theta}_{L^p(X,\mu)} \left(\int_{D\cap B(x_0,R)\cap(X\setminus E_\lambda)} \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|^{\theta'} (x)\, d\mu(x) \right)^{1/\theta'} \\ &\le \|u\|^{p/\theta}_{L^p(X,\mu)} \left(\int_{D\cap B(x_0,R)\cap(X\setminus E_\lambda)} \lambda^{\theta'-1} \frac{d\nu}{d\mu}(x)\, d\mu(x) \right)^{1/\theta'} \\ &\le \lambda^{1/\theta} \|u\|^{p/\theta}_{L^p(X,\mu)} \left(\tilde{\nu}(D)\right)^{1/\theta'}, \end{aligned}$$

co oznacza, że rodzina $\mathcal{F}$ jest p/θ-jednakowo całkowalna względem $\tilde{\nu}$.

Korzystając z twierdzenia 46 oraz twierdzenia 94, otrzymujemy (3.1.1) z miarą $\tilde{\nu}$ w miejscu miary ν.

Niech $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^N$ będzie skończoną $\frac{\varepsilon}{3^{\theta/p}}$-siecią rodziny $\mathcal{F}$ w $L^{p/\theta}(X,\tilde{\nu})$. Dla każdego $u \in \mathcal{F}$ możemy znaleźć $j \in \{1,\ldots,N\}$ takie, że

$$\|u-\tilde{v}_j\|_{L^{p/\theta}(X,\tilde{\nu})} < \frac{\varepsilon}{3^{\theta/p}}.$$

Dla $i = 1,\ldots,N$ niech $v_i = \tilde{v}_i \chi_{B(x_0,R)\cap(X\setminus E_\lambda)}$. Wówczas, korzystając z (3.1.3), otrzymujemy

$$\|u-v_j\|_{L^{p/\theta}(X,\nu)}^{p/\theta} = \int_{B(x_0,R)\cap(X\setminus E_\lambda)} |u(x)-v_j(x)|^{p/\theta} d\nu + \int_{(X\setminus B(x_0,R))\cup E_\lambda} |u(x)|^{p/\theta} d\nu < \varepsilon^{p/\theta}.$$

Zatem $\{v_i\}_{i=1}^N$ jest skończoną ε-siecią rodziny $\mathcal{F}$ w $L^p(X,\nu)$. Z dowolności $\varepsilon \in (0,\infty)$ wynika, że $\mathcal{F}$ jest prezwarta w $L^p(X,\nu)$. □

Wniosek 97. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie skończoną miarą borelowską, absolutnie ciągłą względem μ, taką że $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$ dla pewnej $\theta \in (1,\infty)$. Wówczas dla $\alpha,p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ oraz $\tilde{p} \in (0,p/\theta]$ zanurzenia*

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu) \quad \textit{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu) \tag{3.1.4}$$

są zwarte. Ponadto jeśli dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$ zachodzi $\nu \le C\mu$ (co jest równoważne z $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(X,\mu)$), to powyższe zanurzenia są zwarte dla wszystkich $\tilde{p} \in (0,p)$.

Dowód. Z twierdzenia 96 wynika, że dla $\alpha,p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p/\theta}(X,\nu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p/\theta}(X,\nu)$$

są zwarte. Natomiast z nierówności Höldera zachodzi ciągłe zanurzenie

$$L^{p/\theta}(X,\nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu)$$

dla $\tilde{p} \in (0,p/\theta]$. Stąd wynika pierwsza część wniosku.

Ustalmy $\tilde{p} \in (0,p)$ i niech $\theta = p/\tilde{p} \in (1,\infty)$. Ponieważ $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1 \cap L^\infty(X,\mu)$, więc z nierówności Höldera $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$. Z twierdzenia 96 wynika, że zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu)$$

są zwarte. Z dowolności $\tilde{p} \in (0,p)$ wynika teza drugiej części wniosku. □

Twierdzenie 98. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą, która spełnia $\mu(X) < \infty$. Wówczas dla wszystkich $\alpha,p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ oraz $\tilde{p} \in (0,p)$ zanurzenia*

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu) \quad \textit{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu) \tag{3.1.5}$$

są zwarte. Ponadto jeśli założymy, że dla pewnych $p,q \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ lub $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ oraz $q = \infty$ przynajmniej jedno z zanurzeń (3.1.5) jest ciągłe, to $\mu(X) < \infty$.

Dowód. Jeśli $\mu(X) < \infty$, to zwartość zanurzeń (3.1.5) jest natychmiastową konsekwencją wniosku 97.

Załóżmy, że przynajmniej jedno z zanurzeń (3.1.5) jest ciągłe. Z podpunktów *v*), *vi*), *vii*) w stwierdzeniu 70 wynika, że zachodzą ciągłe zanurzenia

$$M^{1,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^1_{p,\infty}(X,d,\mu) \hookrightarrow A^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$$

dla $A \in \{N, M\}$. W takim razie zanurzenie

$$M^{1,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu) \tag{3.1.6}$$

również jest ciągłe. Ustalmy $R > 2$ i niech k_0 będzie liczbą całkowitą, spełniającą

$$2^{-k_0}R < 1 \leq 2^{-k_0+1}R.$$

Dla $k \geq 0$ zdefiniujmy

$$R_k = R(1 - 2^{-k_0-k}).$$

Niech $z \in X$ oraz $B_k := B(z, R_k)$. Zauważmy, że

$$R_{k+1} - R_k = R\,2^{-k_0-k-1} \geq 2^{-k-2} \text{ oraz } R_0 > R - 1. \tag{3.1.7}$$

Stąd wynika, że $\operatorname{dist}(B_k, X \setminus B_{k+1}) \geq 2^{-k-2}$, więc na mocy lematu 65, istnieje funkcja $\phi_k \in \dot{M}^{1,p}(X,d,\mu)$ taka, że $0 \leq \phi_k \leq 1$, $\phi_k = 1$ na B_k, $\phi_k = 0$ na $X \setminus B_{k+1}$ oraz mamy oszacowanie

$$\|\phi_k\|_{\dot{M}^{1,p}(X,d,\mu)} \leq (\operatorname{dist}(B_k, X \setminus B_{k+1}))^{-1}\mu(B_{k+1})^{1/p} \leq 4 \cdot 2^k \mu(B_{k+1})^{1/p}.$$

Ponadto $\|\phi_k\|_{L^p(X,\mu)} \leq \mu(B_{k+1})^{1/p}$, więc

$$\|\phi_k\|_{M^{1,p}(X,d,\mu)} \leq 8 \cdot 2^k \mu(B_{k+1})^{1/p}. \tag{3.1.8}$$

Z drugiej strony niech $C \in (0, \infty)$ będzie stałą z zanurzenia (3.1.6). Wówczas

$$\|\phi_k\|_{M^{1,p}(X,d,\mu)} \geq 1/C\,\mu(B_k)^{1/\tilde{p}}. \tag{3.1.9}$$

Łączymy oszacowania (3.1.8), (3.1.9) i zapisujemy je w poniższej postaci

$$\frac{1}{\mu(B_{k+1})^{1/p}} \leq 8C2^k \frac{1}{\mu(B_k)^{1/\tilde{p}}}.$$

Stosując lemat 53 dla

$$a_k = 1/\mu(B_k),\ \rho = 8C,\ \tau = 2,\ a = 1/\mu(B(z,R)) \text{ oraz } b = 1/\mu(B(z,R-1)),$$

otrzymujemy

$$1 \le 1/\mu(B_1)^{1-\tilde{p}/p}(8C)^{\tilde{p}}\, 2^{\frac{p\tilde{p}}{p-\tilde{p}}},$$

a stąd wynika

$$\mu(B(z,R-1))^{1-\tilde{p}/p} \le (8C)^{\tilde{p}} 2^{\frac{p\tilde{p}}{p-\tilde{p}}}.$$

Przechodząc do granicy z $R \to \infty$, otrzymujemy, że miara przestrzeni musi być skończona, co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 99. *W drugiej części twierdzenia 98 nie zakładamy, że $L^p(X,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu)$. Gdyby $L^p(X,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu)$ dla $\tilde{p} \in (0,p)$, to skończoność miary natychmiast wynikłaby z poniższego rachunku*

$$\mu(B(z,R))^{1/\tilde{p}} = \|\chi_{B(z,R)}\|_{L^{\tilde{p}}(X,\mu)} \le C\|\chi_{B(z,R)}\|_{L^p(X,\mu)} = C\mu(B(z,R))^{1/p}$$

dla pewnego $C \in (0,\infty)$, wszystkich $z \in X$ i $R \in (0,\infty)$. Stąd

$$\mu(B(z,R))^{1/\tilde{p}-1/p} \le C.$$

Przechodząc z $R \to \infty$, otrzymujemy, że $\mu(X) < \infty$.

Przykład 100. Na $\mathbb{R}^n$ rozważmy miarę ν daną przez $d\nu = \frac{dx}{1+|x|^n}$. Wówczas $\nu(\mathbb{R}^n) = \infty$ oraz dla każdego $\alpha, p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ oraz $\tilde{p} \in (0,p)$ zanurzenia

$$M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n,\nu) \quad \text{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n,\nu) \tag{3.1.10}$$

są zwarte. Ponadto jeśli $p \in [1,\infty)$, to zanurzenia

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n,\nu) \tag{3.1.11}$$

również są zwarte, gdzie $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ oznacza standardową przestrzeń Sobolewa na $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową i miarą Lebesgue'a.

Dowód. Ponieważ $\frac{d\nu}{dx} \in L^t(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich $t \in (1,\infty]$, więc (3.1.10) wynika natychmiast z twierdzenia 96. Natomiast z [31, stwierdzenie 2.2] wynika, że dla każdego $p \in [1,\infty)$ i każdej $\alpha \in (0,1)$ zachodzi ciągłe zanurzenie

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{\alpha,p}_n(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.12}$$

Ponadto z twierdzenia 88 otrzymujemy ciągłość zanurzenia

$$W_n^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.13}$$

Łącząc (3.1.12) z (3.1.13) i korzystając z (3.1.10) dla $q=\infty$, otrzymujemy (3.1.11). $\square$

3.2 Zwartość zanurzeń w $L^p(X,\nu)$

Teraz skupimy się na problemie zwartości zanurzeń w $L^p(X,\nu)$. Wstawiając formalnie $\theta = 1$ do twierdzenia 96, moglibyśmy oczekiwać, że wystarczy zakładać $\nu \le C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$, aby otrzymać zwartość zanurzeń w $L^p(X,\nu)$. Jednakże nie jest to w ogólności prawdą i wynika to na przykład z twierdzenia 125, które zostanie udowodnione później. Problem polega na tym, że w poprzednim podrozdziale dla $\tilde{p} < p$ $\tilde{p}$-jednakowa całkowalność zbiorów ograniczonych w $M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$ i $N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$ wynikała natychmiast z nierówności Höldera. Teraz musimy innym sposobem wyłuskać p-jednakową całkowalność. Poniższe twierdzenie jest jednym z głównych wyników rozprawy doktorskiej.

Twierdzenie 101. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie dowolną miarą borelowską taką, że $\nu \le C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$. Załóżmy, że istnieją $r_0 \in (0,\infty)$ i $x_0 \in X$ takie, że dla wszystkich $r \in (0, r_0]$ spełnione są następujące warunki* [8]*:*

(i) rodzina funkcji $\Big\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in X}$ jest jednakowo całkowalna względem miary ν;

(ii) $\sup\limits_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x) \to 0$ przy $R\to\infty$.

Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0,\infty)$ oraz $q \in (0,\infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\nu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\nu)$$

są zwarte.

Uwaga 102. *Jeśli $\nu(X) < \infty$, to w powyższym twierdzeniu warunek (ii) wynika z warunku (i).*

[8] Podobny warunek do (i) rozważał Aldaz w [2]

Dowód uwagi. Niech $r \in (0, r_0]$, ustalmy $\varepsilon \in (0,\infty)$ i niech $\delta \in (0,\infty)$ będzie taka, że jeśli zbiór mierzalny $D \subseteq X$, spełnia $\nu(D) < \delta$, to dla dowolnego $y \in X$

$$\int_D \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))d\nu(x) < \varepsilon.$$

Ustalmy $R > r$ na tyle duże, że $\nu(X \setminus B(x_0, R-r)) < \delta$. Niech $y \in X \setminus B(x_0, R)$. Ponieważ zachodzi inkluzja $B(y,r) \subseteq X \setminus B(x_0, R-r)$, zatem

$$\int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))d\nu(x) = \int_{X\setminus B(x_0,R-r)} \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))d\nu(x) < \varepsilon.$$

Z dowolności $y \in X \setminus B(x_0, R)$ mamy

$$\sup_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x) \leq \varepsilon.$$

Przechodząc z $R \to \infty$, otrzymujemy

$$\limsup_{R\to\infty} \sup_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x) \leq \varepsilon.$$

Przechodząc teraz z $\varepsilon \to 0^+$, dostajemy (ii). □

Dowód twierdzenia. Zaczniemy od pokazania następującego lematu

Lemat 103. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie dowolną miarą borelowską, absolutnie ciągłą względem μ. Wówczas dla wszystkich $\alpha, p, r \in (0,\infty)$, $u \in M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$, $g \in \mathbb{D}^\alpha(u)$ i dowolnego zbioru mierzalnego $D \subseteq X$ zachodzi nierówność*

$$\int_D |u(x)|^p\, d\nu(x) \leq 4^p r^{\alpha p} \|g\|^p_{L^p(X,\nu)} + \int_X (4^p r^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p) \int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x)\, d\mu(y).$$

Dowód. Dla μ-prawie wszystkich $x, y \in X \setminus E$ mamy

$$|u(x)|^p \leq 2^p(|u(x) - u(y)|^p + |u(y)|^p).$$

Przykładając całkę średnią względem $y \in B(x,r)$ do powyższej nierówności, otrzymujemy, że dla μ-prawie wszystkich $x \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &\leq 2^p\left(⨍_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p\, d\mu(y) + ⨍_{B(x,r)} |u(y)|^p\, d\mu(y)\right) \\
&\leq 2^p\left(2^p ⨍_{B(x,r)} r^{\alpha p}(g^p(x) + g^p(y))\, d\mu(y) + ⨍_{B(x,r)} |u(y)|^p\, d\mu(y)\right) \\
&= 4^p r^{\alpha p} g^p(x) + ⨍_{B(x,r)} 4^p r^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p d\mu(x).
\end{aligned}$$

Z absolutnej ciągłości ν względem μ, powyższa nierówność również zachodzi ν-prawie wszędzie. Zatem możemy ją wycałkować po D względem ν i korzystając z twierdzenia Fubiniego, otrzymać oszacowanie

$$\begin{aligned}\int_D |u(x)|^p \, d\nu(x) &\leq 4^p r^{\alpha p} \|g\|^p_{L^p(X,\nu)} + \int_D \int_X \frac{4^p r^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p}{\mu(B(x,r))} \chi_{B(x,r)}(y) d\mu(y) d\nu(x) \\ &\leq 4^p r^{\alpha p} \|g\|^p_{L^p(X,\nu)} + \int_X (4^p r^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p) \int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) d\mu(y),\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. $\square$

Lemat 104. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie dowolną miarą borelowską taką, że $\nu \leq C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0, \infty)$. Ponadto załóżmy, że istnieje takie $r_0 \in (0, \infty)$, że dla każdego $r \in (0, r_0]$ rodzina funkcji*

$$\Big\{ X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r)) \Big\}_{y \in X}$$

jest jednakowo całkowalna względem ν. Wtedy dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$ ograniczone podzbiory $M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ są p-jednakowo całkowalne względem ν.

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{F} \subseteq M^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ jest ograniczona i niech $M = \sup_{u \in \mathcal{F}} \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $M > 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $g \in \mathbb{D}^\alpha(u)$ będzie takie, że

$$\|g\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

Niech $v(y) = (4^p r_0^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p)^{1/p}$ dla $y \in X$. Z założenia $\nu \leq C\mu$ wynika, że $\|g\|^p_{L^p(X,\nu)} \leq C \|g\|^p_{L^p(X,\mu)}$. W takim razie z lematu 103 otrzymujemy

$$\int_D |u(x)|^p \, d\nu(x) \leq C 4^p r^{\alpha p} M^p + \int_X |v(y)|^p \int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) \, d\mu(y) \tag{3.2.1}$$

dla każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq X$ i każdego $r \in (0, r_0]$. Ustalmy $r \in (0, r_0]$, które spełnia

$$C 4^p r^{\alpha p} M^p < \varepsilon/2.$$

Zauważmy, że

$$\int_X |v(y)|^p d\mu(y) = \int_X 4^p r_0^{\alpha p} g^p(y) + 2^p |u(y)|^p d\mu(y) \leq 2 \cdot 4^p M^p \max\{1, r_0^{\alpha p}\}. \tag{3.2.2}$$

Z założenia, rodzina funkcji $\Big\{x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in X}$ jest jednakowo całkowalna względem ν. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $y \in X$ i każdego zbioru mierzalnego spełniającego $\nu(D) < \delta$ zachodzi

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) < \varepsilon/(4^{p+1}M^p \max\{1, r_0^{\alpha p}\}).$$

Stąd jeśli $\nu(D) < \delta$, to z nierówności (3.2.1) i (3.2.2) otrzymujemy

$$\int_D |u(x)|^p \, d\nu(x) \le \varepsilon/2 + \int_X |v(y)|^p \int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x)\, d\mu(y) < \varepsilon.$$

□

Możemy wreszcie pokazać tezę twierdzenia 101. Na mocy uwagi 93, wystarczy pokazać tezę tylko dla przestrzeni $M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$. Tak jak w dowodzie lematu 104 zakładamy, że $\mathcal{F} \subseteq M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ jest ograniczona, $M := \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} \|u\|_{M^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$ oraz możemy zakładać, że $M > 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $r \in (0, r_0]$ takie, że

$$C4^p r^{\alpha p} M^p < \varepsilon/4. \tag{3.2.3}$$

Niech v będzie takie jak w dowodzie lematu 104. Dzięki (ii) możemy znaleźć $R > r$ takie, że

$$\sup_{y\in X\setminus B(x_0,R-r)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r)) d\nu(x) < \varepsilon/(2\cdot 4^{p+1}M^p \max\{1, r_0^{\alpha p}\}).$$

Dla każdego $y \in B(x_0, R-r)$ zachodzi $(X \setminus B(x_0,R)) \cap B(y,r) = \emptyset$. Korzystając z nierówności (3.2.1) dla $D = X \setminus B(x_0,R)$ i mając na uwadze (3.2.2) oraz (3.2.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus B(x_0,R)} |u(x)|^p \, d\nu(x) &< \varepsilon/4 + \int_X |v(y)|^p \int_{(X\setminus B(x_0,R))\cap B(y,r)} 1/\mu(B(x,r)) d\nu(x)\, d\mu(y)\\ &\le \varepsilon/4 + \int_X |v(y)|^p \sup_{y\in X\setminus B(x_0,R-r)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r)) d\nu(x)\, d\mu(y)\\ &< \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Rozważmy teraz miarę $\tilde{\nu} := \nu \llcorner \Big(B(x_0,R)\Big)$. $\tilde{\nu}$ jest skończona oraz spełnia $\tilde{\nu} \le \nu \le C\mu$. Ponadto dla każdego $r \in (0, r_0]$ rodzina funkcji $\Big\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in X}$ jest jednakowo całkowalna względem miary $\tilde{\nu}$. Istotnie, jeśli ustalimy $r \in (0, r_0]$, to z założenia (i) dla dowolnej $\eta > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli zbiór mierzalny spełnia $\nu(D) < \delta$, to dla każdego $y \in X$

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) < \eta.$$

Natomiast jeśli założymy, że $\tilde{\nu}(D) < \delta$, to oznacza, że $\nu(D \cap B(x_0, R)) < \delta$. W takim razie z powyższej nierówności otrzymujemy, że

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\tilde{\nu}(x) = \int_{D \cap B(x_0,R)} \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) < \eta.$$

Możemy więc skorzystać z lematu 104, stwierdzenia 94 oraz twierdzenia 46 dla miary $\tilde{\nu}$ w miejscu miary ν. Stąd wynika, że istnieje skończony zbiór $\{w_i\}_{i=1}^N$ taki, że dla każdego $u \in \mathcal{F}$ możemy znaleźć $j \in \{1, \ldots, N\}$ takie, że

$$\|u - w_j\|_{L^p(X,\tilde{\nu})}^p < \varepsilon/2.$$

Niech $u_i(x) = w_i(x)\chi_{B(x_0,R)}$ dla $i \in \{1, \ldots, N\}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\|u - u_j\|_{L^p(X,\nu)}^p &= \int_{B(x_0,R)} |u - u_j|^p d\nu + \int_{X \setminus B(x_0,R)} |u(x)|^p d\nu(x) \\
&< \|u - w_j\|_{L^p(X,\tilde{\nu})}^p + \varepsilon/2 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc, że rodzina $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczona w $L^p(X, \nu)$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Uwaga 105. *Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą oraz niech ν będzie miarą borelowską taką, że $\nu \leq C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0, \infty)$. Załóżmy ponadto, że μ jest całkowalna względem ν. Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ zanurzenia*

$$M_{p,q}^\alpha(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \nu) \quad \textit{oraz} \quad N_{p,q}^\alpha(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \nu)$$

są zwarte.

Dowód. Dla każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq X$, $y \in X$ oraz $r \in (0, \infty)$ zachodzi

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))} d\nu(x) \leq \int_D \frac{1}{\mu(B(x,r))} d\nu(x).$$

Stąd całkowalność miary μ względem ν natychmiast implikuje, że warunki (i) oraz (ii) w twierdzeniu 101 są spełnione. □

Wniosek 106. *Niech (X, d, μ) będzie całkowicie ograniczoną przestrzenią metryczną z miarą. Wówczas dla każdego $\alpha, p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ zanurzenia*

$$M_{p,q}^\alpha(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \mu) \quad \textit{oraz} \quad N_{p,q}^\alpha(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \mu)$$

są zwarte.

Dowód. Wniosek wynika natychmiast z uwagi 105 oraz stwierdzenia 43. $\square$

Z uwagi 105 wynika, że jeśli założymy całkowalność miary μ względem ν, to warunki (i) oraz (ii) z twierdzenia 101 będą spełnione. Poniższa uwaga pokazuje, że możemy inaczej sprawdzać warunek (i), tzn. przy pomocy twierdzenia de la Vallée-Poussina.

Uwaga 107. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie dowolną miarą borelowską spełniającą $\nu \le C\mu$ dla pewnego $C \in (0,\infty)$. Załóżmy, że istnieje $r_0 \in (0,\infty)$ oraz $x_0 \in X$ takie, że dla każdego $r \in (0,r_0]$ istnieje funkcja $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka, że:*

(i) $\psi(0)=0$, ψ jest wypukła oraz $\psi(t)/t \to \infty$ przy $t \to \infty$;

(ii) $\displaystyle\sup_{y\in B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} \psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right) d\nu(x) < \infty$ dla każdego $R \in (0,\infty)$;

(iii) $\displaystyle\sup_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x) \to 0$ przy $R \to \infty$.

Wówczas dla wszystkich $\alpha, p \in (0,\infty)$ oraz $q \in (0,\infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\nu) \quad \textit{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\nu)$$

są zwarte.

Dowód. Ustalmy $r \in (0,r_0]$. Wystarczy pokazać, że rodzina

$$\Big\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in X}$$

jest jednakowo całkowalna względem miary ν (wówczas teza będzie wynikać z twierdzenia 101). Ustalmy $\varepsilon > 0$ i będziemy chcieli dobrać $\delta > 0$ taką, że jeśli $\nu(D) < \delta$, to dla każdego $y \in X$

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}\, d\nu(x) < \varepsilon.$$

Z założenia (iii) wynika, że możemy wybrać $R \in (0,\infty)$ takie, że

$$\sup_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x) < \varepsilon. \tag{3.2.4}$$

Rozważmy miarę $\tilde{\nu} = \nu \llcorner (B(x_0,R+r))$. Dla $y \in B(x_0,R)$ z nierówności trójkąta wynika, że $B(y,r) \subseteq B(x_0,R+r)$. W takim razie z warunku (ii) otrzymujemy, że

$$\sup_{y\in B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} \psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right) d\tilde{\nu}(x) < \infty.$$

Ponadto rodzina

$$\Big\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in B(x_0,R)}$$

jest ograniczona w $L^1(X,\tilde{\nu})$. Istotnie, z (i) wynika, że istnieje $\lambda > 0$ taka, że dla $t \geq \lambda$ zachodzi $\psi(t) \geq t$. Wówczas dla $y \in B(x_0,R)$

$$\begin{aligned}\int_X \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\, d\tilde{\nu}(x) &= \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x)\\ &= \int_{B(y,r)\cap\{x\in X:\mu(B(x,r))>1/\lambda\}} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x)\\ &+ \int_{B(y,r)\cap\{x\in X:\mu(B(x,r))\leq 1/\lambda\}} 1/\mu(B(x,r))\, d\nu(x)\\ &\leq \lambda\nu(B(y,r)) + \int_{B(y,r)} \psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)\\ &\leq C\lambda\mu(B(x_0,R+r)) + \sup_{z\in B(x_0,R)} \int_{B(z,r)} \psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ponadto ponieważ $\psi(0)=0$, więc

$$\int_{B(y,r)} \psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x) = \int_X \psi\left(\frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x).$$

W takim razie możemy skorzystać z twierdzenia de la Vallée-Poussina [93, twierdzenie 2], z którego wynika, że rodzina $\Big\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\Big\}_{y\in B(x_0,R)}$ jest jednakowo całkowalna względem miary $\tilde{\nu}$. Stąd wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $\tilde{\nu}(D) < \delta$, to

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\tilde{\nu}(x) < \varepsilon.$$

Niech teraz $D \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem mierzalnym takim, że $\nu(D) < \delta$. Znów korzystając z faktu, że dla $y \in B(x_0,R)$ zachodzi $B(y,r) \subseteq B(x_0,R+r)$, otrzymujemy

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\nu(x) = \int_{D\cap B(x_0,R+r)} \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\nu(x) = \int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\tilde{\nu}(x) < \varepsilon.$$

Natomiast jeśli $y \in X \setminus B(x_0,R)$, to z (3.2.4) wynika

$$\int_D \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\nu(x) \leq \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))d\nu(x) < \varepsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że warunek (i) w twierdzeniu 101 jest spełniony. □

Uwaga 108. *Jeśli $\nu(X) < \infty$, to warunki (ii) oraz (iii) w uwadze 107 można zastąpić przez:*

$$(iv)\ \sup_{y\in X}\int_{B(y,r)}\psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)<\infty.$$

Dowód. Dla każdego $y \in X$ dzięki nierówności Jensena mamy

$$\begin{aligned}
\psi\left(\left\|\frac{\chi_{B(y,r)}(\cdot)}{\mu(B(\cdot,r))}\right\|_{L^1(X,\nu)}/\nu(X)\right) &= \psi\left(⨍_X \frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}d\nu(x)\right)\\
&\leq ⨍_X \psi\left(\frac{\chi_{B(y,r)}(x)}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)\\
&= 1/\nu(X)\int_{B(y,r)}\psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)\\
&\leq \sup_{z\in X} 1/\nu(X)\int_{B(z,r)}\psi\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)d\nu(x)<\infty.
\end{aligned}$$

Gdyby istniał ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ taki, że $\left\|\frac{\chi_{B(y_n,r)}(\cdot)}{\mu(B(\cdot,r))}\right\|_{L^1(X,\nu)} \to \infty$ przy $n \to \infty$, to ponieważ $\psi(t)/t \to \infty$ przy $t \to \infty$, więc lewa strona w powyższym ciągu nierówności również zbiegałaby do nieskończoności. Jednakże jest to niemożliwe, gdyż prawa strona jest ograniczona. Stąd wynika, że rodzina $\left\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\right\}_{y\in X}$ jest ograniczona w $L^1(X,\nu)$, więc z twierdzenia de la Vallée-Poussina wynika, że jest jednakowo całkowalna względem ν. Z uwagi 102 otrzymujemy tezę. □

Przykład 109. W uwagach 107 i 108 funkcja ψ może być dowolną funkcją wypukłą spełniającą (i), która może zależeć od $r_0 \in (0,\infty)$, $x_0 \in X$ oraz od $r \in (0, r_0]$. Jednakże nawet w najprostszym przypadku, tzn. jeśli ψ jest postaci $\psi(t) = |t|^{1+\gamma}$ dla $\gamma \in (0,\infty)$, to wówczas w warunkach (ii) oraz (iv) żądamy, aby całki

$$\int_{B(y,r)}\frac{1}{\mu(B(x,r))^{1+\gamma}}\,d\nu(x)$$

były wspólnie ograniczone dla wszystkich $y \in B(x_0, R)$ w warunku (ii) lub wszystkich $y \in X$ w warunku (iv). Tak jak w stwierdzeniu 43 łatwo można pokazać, że powyższe warunki spełnia dowolna, całkowicie ograniczona przestrzeń metryczna z miarą (w przypadku $\nu = \mu$, więc również dla dowolnego $\nu \leq C\mu$), co pokazuje że rodzina par miar (ν,μ), które spełniają przynajmniej jeden z powyższych warunków dla pewnej $\gamma > 0$ jest nietrywialna.

3.3 Zwartość w $M^{\beta}_{p,r}$ i $N^{\beta}_{p,r}$

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się problemem zwartości zanurzeń $A^{\alpha}_{p,q} \hookrightarrow \tilde{A}^{\beta}_{p,r}$ dla $A, \tilde{A} \in \{M, N\}$. Okazuje się, że zachodzi podobne zjawisko jak w przypadku przestrzeni funkcji hölderowsko ciągłych (tzn. ograniczoność w $C^{0,\alpha}(X,d)$ i zwartość w $C(X,d)$ gwarantują nam zwartość w $C^{0,\beta}(X,d)$ - patrz dowód twierdzenia 38).

Lemat 110. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech ν będzie dowolną miarą borelowską. Ustalmy $\alpha, p \in (0,\infty)$ oraz $q \in (0,\infty]$ i niech $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ograniczonym w $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)$ lub $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)$. Jeśli $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $L^p(X,\nu)$, to jest zbieżny także w $M^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$ oraz $N^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$ dla dowolnej $\beta \in (0,\alpha)$ i każdego $r \in (0,\infty]$.*

Dowód. Niech $A \in \{M, N\}$ i załóżmy, że $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $A^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)$ i niech

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{A^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)}.$$

Na mocy stwierdzenia 70, wystarczy pokazać tezę lematu tylko dla przestrzeni tego samego typu, w przypadku gdy $r = q$. Pokażemy więc, że dla każdej $\beta \in (0,\alpha)$ ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego w $A^{\beta}_{p,q}(X,d,\nu)$ (przestrzenie Hajłasza-Biesowa i Hajłasza-Triebla-Lizorkina, na mocy uwagi 69, są zawsze zupełne). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ możemy znaleźć $\overrightarrow{g_n} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u_n)$ takie, że

$$\|\overrightarrow{g_n}\| \leq \|u_n\|_{A^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu)} \leq C,$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą $L^p(\ell^q)$, jeśli $A = M$ lub normą $\ell^q(L^p)$ dla $A = N$. Niech E_n będą zbiorami miary zero takimi, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ i wszystkich $x, y \in X \setminus E_n$ spełniających $2^{-k-1} \leq d(x,y) < 2^{-k}$ zachodzi

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq [d(x,y)]^{\alpha}\Big(g_{n,k}(x) + g_{n,k}(y)\Big),$$

gdzie przez $g_{n,k}$ oznaczamy k-ty element ciągu $\overrightarrow{g_n}$. Zdefiniujmy $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ oraz dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $\overrightarrow{g_{n,m}} = \overrightarrow{g_n} + \overrightarrow{g_m} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}(u_n - u_m)$. Wówczas mamy

$$\|\overrightarrow{g_{n,m}}\| \leq C\kappa(p)\kappa(q),$$

gdzie $\kappa : (0,\infty] \to [1,\infty)$ dana jest wzorem

$$\kappa(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [1,\infty], \\ 2^{1/t-1} & \text{dla } t \in (0,1). \end{cases}$$

Ustalmy $\varepsilon \in (0,\infty)$ i niech $K \in \mathbb{Z}$ będzie takie, że $2^{-K} \le \varepsilon < 2^{-K+1}$. Jeśli $k \in \mathbb{Z}$ i $k \ge K$ to dla $x, y \in X \setminus E$ takich, że $2^{-k-1} \le d(x,y) < 2^{-k}$ zachodzi

$$\begin{aligned}|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)| &\le [d(x,y)]^{\alpha}(g_{n,m,k}(x) + g_{n,m,k}(y)) \\ &\le [d(x,y)]^{\beta}(\varepsilon^{\alpha-\beta} g_{n,m,k}(x) + \varepsilon^{\alpha-\beta} g_{n,m,k}(y)).\end{aligned}$$

Z drugiej strony jeśli $k < K$, to dla $x, y \in X \setminus E$ spełniających $2^{-k-1} \le d(x,y) < 2^{-k}$ mamy

$$|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)| \le [d(x,y)]^{\beta}\Big(2^{\beta}2^{k\beta}|(u_n - u_m)(x)| + 2^{\beta}2^{k\beta}|(u_n - u_m)(y)|\Big).$$

W takim razie możemy zdefiniować $\overrightarrow{h_{n,m}} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\beta}(u_n - u_m)$ wzorem

$$h_{n,m,k}(x) = \begin{cases} 2^{\beta}2^{k\beta}|u_n(x) - u_m(x)|, & \text{jeśli } k < K, \\ \varepsilon^{\alpha-\beta} g_{n,m,k}(x), & \text{jeśli } k \ge K. \end{cases}$$

Pierwszy przypadek: „$A = M$”

Zaczniemy od oszacowania normy $\ell^q(\mathbb{Z})$ ciągu $\{h_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Jeśli $q = \infty$, to dla każdego $x \in X \setminus E$

$$\|\{h_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z})} \le \frac{2^{\beta}}{\varepsilon^{\beta}}|u_n(x) - u_m(x)| + \varepsilon^{\alpha-\beta}\|\{g_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z})}.$$

Podobnie jeśli $q \in (0,\infty)$ i $x \in X \setminus E$, to mamy

$$\begin{aligned}\|\{h_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z})} &= \sum_{k=-\infty}^{K-1} 2^{\beta q}2^{k\beta q}|u_n(x) - u_m(x)|^q + \sum_{k=K}^{\infty} \varepsilon^{(\alpha-\beta)q} g^q_{n,m,k}(x) \\ &\le \frac{2^{\beta q}/\varepsilon^{\beta q}}{1 - 2^{-\beta q}}|u_n(x) - u_m(x)|^q + \varepsilon^{(\alpha-\beta)q}\|\{g_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$

Stąd dla $q \in (0,\infty]$

$$\|\{h_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \le \gamma(\beta,q)\kappa(q)\frac{2^{\beta}}{\varepsilon^{\beta}}|u_n(x) - u_m(x)| + \kappa(q)\varepsilon^{\alpha-\beta}\|\{g_{n,m,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})},$$

gdzie

$$\gamma(\beta,p) = \begin{cases} (1 - 2^{-\beta q})^{-1/q} & \text{dla } q \in (0,\infty), \\ 1 & \text{dla } q = \infty. \end{cases}$$

Biorąc teraz normę $L^p(X,\nu)$, otrzymujemy

$$\|u_n - u_m\|_{\dot{M}^{\beta}_{p,q}(X,d,\nu)} \le \gamma(\beta,q)\kappa(q)\kappa(p)\frac{2^{\beta}}{\varepsilon^{\beta}}\|u_n - u_m\|_{L^p(X,\nu)} + 2\kappa(q)^2\kappa(p)^2\varepsilon^{\alpha-\beta}C. \quad (3.3.1)$$

Drugi przypadek: „$A = N$”

Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|h_{n,m,k}\|_{L^p(X,\nu)} = \begin{cases} 2^\beta 2^{k\beta}\|u_n - u_m\|_{L^p(X,\nu)}, & \text{jeśli } k < K, \\ \varepsilon^{\alpha-\beta}\|g_{n,m,k}\|_{L^p(X,\nu)}, & \text{jeśli } k \geq K. \end{cases}$$

W takim razie jeśli $q = \infty$, to

$$\|\{\|h_{n,m,k}\|_{L^p(X,\nu)}\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \frac{2^\beta}{\varepsilon^\beta}\|u_n - u_m\|_{L^p(X,\nu)} + \varepsilon^{\alpha-\beta}\|\{\|g_{n,m,k}\|_{L^p(X,\nu)}\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Natomiast gdy $q \in (0,\infty)$, to

$$\|\{\|h_{n,m,k}\|_{L^p(X,\nu)}\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \sum_{k=-\infty}^{K-1} 2^\beta 2^{k\beta q}\|u_n - u_m\|^q_{L^p(X,\nu)} + \sum_{k=K}^{\infty} \varepsilon^{(\alpha-\beta)q}\|g_{n,m,k}\|^q_{L^p(X,\nu)},$$

zatem

$$\|u_n - u_m\|_{\dot{N}^\beta_{p,q}(X,d,\nu)} \leq \gamma(\beta,q)\kappa(q)\frac{2^\beta}{\varepsilon^\beta}\|u_n - u_m\|_{L^p(X,\nu)} + 2\kappa(q)^2\kappa(p)\varepsilon^{\alpha-\beta}C. \tag{3.3.2}$$

Ponieważ $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^p(X,\nu)$ oraz $\varepsilon \in (0,\infty)$ jest dowolny, więc z nierówności (3.3.1) i (3.3.2) wnioskujemy, że $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego odpowiednio w $M^\beta_{p,q}(X,d,\nu)$ i $N^\beta_{p,q}(X,d,\nu)$. □

Twierdzenie 111. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską ν. Niech $\alpha, p \in (0,\infty)$ i $q \in (0,\infty]$ będą ustalone. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) zanurzenie $M^\alpha_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow L^p(X,\nu)$ jest zwarte;

(ii) dla wszystkich $\beta \in (0,\alpha)$ i $r \in (0,\infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow M^\beta_{p,r}(X,d,\nu) \quad \textit{oraz} \quad M^\alpha_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow N^\beta_{p,r}(X,d,\nu)$$

są zwarte;

(iii) istnieją $\beta \in (0,\alpha)$ i $r \in (0,\infty]$ takie, że przynajmniej jedno z zanurzeń

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow M^\beta_{p,r}(X,d,\nu) \quad \textit{lub} \quad M^\alpha_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow N^\beta_{p,r}(X,d,\nu)$$

jest zwarte.

Analogicznej postaci twierdzenie zachodzi również dla przestrzeni Hajłasza-Biesowa.

Twierdzenie 112. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w miarę borelowską ν. Niech $\alpha, p \in (0,\infty)$ i $q \in (0,\infty]$ będą ustalone. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *zanurzenie* $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow L^p(X,\nu)$ *jest zwarte;*

(ii) *dla wszystkich* $\beta \in (0,\alpha)$ *i* $r \in (0,\infty]$ *zanurzenia*

$$N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow M^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu) \quad \textit{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow N^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$$

są zwarte;

(iii) *istnieją* $\beta \in (0,\alpha)$ *i* $r \in (0,\infty]$ *takie, że przynajmniej jedno z zanurzeń*

$$N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow M^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu) \quad \textit{lub} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\nu) \hookrightarrow N^{\beta}_{p,r}(X,d,\nu)$$

jest zwarte.

Dowód twierdzeń 111 oraz 112. Zauważmy, że na mocy stwierdzenia 70, zanurzenia w podpunktach (*ii*) są zawsze ciągłe. Wówczas implikacje „(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)” oraz „(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)” są trywialne, natomiast implikacje „(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)” wynikają z lematu 110. $\square$

Fakt 113. *Niech* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną,* $p,\tilde{p} \in (0,\infty)$ *oraz* μ *i* ν *niech będą miarami borelowskimi takimi, że zanurzenie*

$$L^p(X,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu) \tag{3.3.3}$$

jest ciągłe. Wówczas dla każdego $\alpha \in (0,\infty)$ *oraz* $q \in (0,\infty]$ *zanurzenia*

$$\begin{aligned} \dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) &\hookrightarrow \dot{M}^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu), \quad & \dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) &\hookrightarrow \dot{N}^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu), \\ M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) &\hookrightarrow M^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu), \quad & N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) &\hookrightarrow N^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu) \end{aligned}$$

są ciągłe.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę dla jednorodnych przestrzeni. Z założenia (3.3.3) wynika, że istnieje stała $C \in (0,\infty)$ taka, że dla każdego $f \in L^p(X,\mu)$ zachodzi

$$\|f\|_{L^{\tilde{p}}(X,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}. \tag{3.3.4}$$

Biorąc w powyższej nierówności $f = \chi_E$, gdzie $E \subseteq X$ jest dowolnym zbiorem mierzalnym takim, że $\mu(E) = 0$, otrzymujemy absolutną ciągłość ν względem μ. Niech $u \in L^p(X,\mu)$ i weźmy dowolny $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}_{\mu}(u)$. Ponieważ $\nu << \mu$, więc również $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}_{\nu}(u)$. Natomiast jeśli

$$\|\overrightarrow{g}\|_{L^p(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)} < \infty,$$

to z (3.3.4) wynika

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu)} \le \|\overrightarrow{g}\|_{L^{\tilde{p}}(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\nu)} \le C\|\overrightarrow{g}\|_{L^{p}(X;\ell^q(\mathbb{Z}),\mu)}.$$

Biorąc infimum prawej strony, otrzymujemy

$$\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu)} \le C\|u\|_{\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)}.$$

Podobnie jeśli

$$\|\overrightarrow{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))} < \infty,$$

to dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ z (3.3.4) wynika

$$\|g_k\|_{L^{\tilde{p}}(X,\nu)} \le C\|g_k\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Przykładając normę $\ell^q(\mathbb{Z})$, otrzymujemy

$$\|u\|_{\dot{N}^{\alpha}_{\tilde{p},q}(X,d,\nu)} \le \|\overrightarrow{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^{\tilde{p}}(X,\nu))} \le C\|\overrightarrow{g}\|_{\ell^q(\mathbb{Z};L^p(X,\mu))}.$$

Tak jak wcześniej, biorąc infimum prawej strony po wszystkich $\overrightarrow{g} \in \overrightarrow{\mathbb{D}}^{\alpha}_{\mu}(u)$, otrzymujemy żądaną nierówność. □

Teraz przy pomocy lematu 110 oraz faktu 113 możemy wzmocnić wyniki z podrozdziałów 3.1 i 3.2.

Wniosek 114. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie miarą borelowską taką, że $\nu << \mu$ oraz $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$ dla pewnej $\theta \in (1,\infty)$, gdzie $\theta' = \theta/(\theta-1)$. Wówczas dla każdego $\alpha, p \in (0,\infty)$, $q, r \in (0,\infty]$ oraz $\beta \in (0,\alpha)$ zanurzenia*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta}_{p/\theta,r}(X,d,\nu), \quad M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\beta}_{p/\theta,r}(X,d,\nu),$$
$$N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta}_{p/\theta,r}(X,d,\nu), \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\beta}_{p/\theta,r}(X,d,\nu)$$

są zwarte.

Dowód. Niech $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ograniczonym w $A^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ dla $A \in \{M,N\}$. Na mocy twierdzenia 96, istnieje podciąg $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ zbieżny w $L^{p/\theta}(X,\nu)$. Ponieważ $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$, więc dla dowolnego $f \in L^p(X,\mu)$ z nierówności Höldera mamy

$$\|f\|_{L^{p/\theta}(X,\nu)} = \Big(\int_X |f|^{p/\theta}\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu\Big)^{\theta/p} \le \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_X |\tfrac{d\nu}{d\mu}|^{\theta'} d\mu\Big)^{\frac{\theta-1}{p}}.$$

To oznacza, że zachodzi ciągłe zanurzenie

$$L^p(X,\mu) \hookrightarrow L^{p/\theta}(X,\nu).$$

Zatem, na mocy faktu 113, $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $A^\alpha_{p/\theta,q}(X,d,\nu)$. Możemy więc zastosować lemat 110 dla ciągu $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ z p/θ w miejscu p i otrzymujemy, że $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $M^\beta_{p/\theta,r}(X,d,\mu)$ oraz $N^\beta_{p/\theta,r}(X,d,\mu)$ dla każdego $r \in (0,\infty]$ i każdej $\beta \in (0,\alpha)$. □

Wniosek 115. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i niech ν będzie dowolną miarą borelowską taką, że $\nu \le C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$. Załóżmy, że istnieją $r_0 \in (0,\infty)$ i $x_0 \in X$ takie, że dla wszystkich $r \in (0,r_0]$ spełnione są następujące warunki*

(i) rodzina funkcji $\left\{X \ni x \mapsto \chi_{B(y,r)}(x)/\mu(B(x,r))\right\}_{y\in X}$ jest jednakowo całkowalna względem miary ν;

(ii) $\sup_{y\in X\setminus B(x_0,R)} \int_{B(y,r)} 1/\mu(B(x,r))\,d\nu(x) \to 0$ przy $R\to\infty$.

Wówczas dla wszystkich $\alpha,p \in (0,\infty)$, $q,r \in (0,\infty]$ oraz $\beta \in (0,\alpha)$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{p,r}(X,d,\nu), \quad M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{p,r}(X,d,\nu),$$
$$N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{p,r}(X,d,\nu), \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{p,r}(X,d,\nu)$$

są zwarte.

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu wniosku 114 i jest konsekwencją twierdzenia 101, faktu 113 i lematu 110. □

Wniosek 116. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą oraz niech ν będzie skończoną miarą borelowską taką, że $\nu \le C\mu$ dla pewnej stałej $C \in (0,\infty)$. Wówczas dla wszystkich $\alpha,p \in (0,\infty)$, $q,r \in (0,\infty]$, $\beta \in (0,\alpha)$ oraz $\tilde{p} \in (0,p)$ zanurzenia*

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\nu), \quad M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\nu),$$
$$N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\nu), \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\nu)$$

są zwarte. W szczególności jeśli $\mu(X) < \infty$, to zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\mu), \quad M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\mu),$$
$$N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\mu), \quad N^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^\beta_{\tilde{p},r}(X,d,\mu)$$

są zwarte.

Dowód. Z założeń $\nu(X) < \infty$ i $\nu \leq C\mu$ wynika, że $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^{\theta'}(X,\mu)$ dla każdej $\theta \in [1,\infty)$, więc teza wynika natychmiast z wniosku 114. $\square$

3.4 Wnioski dla przestrzeni Słobodeckiego

Twierdzenie 117. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą θ-regularną z dołu i ustalmy $\alpha, p, s \in (0,\infty)$ takie, że $\alpha p > \theta - s$. Wówczas jeśli $\mu(X) < \infty$, to zanurzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$ jest zwarte.*

Dowód. Ponieważ μ jest θ-regularna z dołu oraz $\mu(X) < \infty$, więc na mocy wniosku 37, (X,d) jest całkowicie ograniczona. Zatem teza twierdzenia wynika natychmiast z twierdzenia 88 oraz wniosku 106. $\square$

Twierdzenie 118. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu taką, że $\mu(X) < \infty$. Ustalmy $\alpha, p \in (0,\infty)$. Wówczas:*

(i) jeśli $\alpha p < s$, to dla każdego $\tilde{p} \in (0, sp/(s-\alpha p))$ zanurzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu)$ jest zwarte;

(ii) jeśli $\alpha p > s$, to dla każdej $\gamma \in (0, \alpha - s/p)$ zanurzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(X,d)$ jest zwarte.

Dowód. (i) Na mocy twierdzenia 72 istnieje $C \in (0,\infty)$ takie, że dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ mamy

$$\|u\|_{L^{p^*}(X,\mu)} \leq C\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)},$$

gdzie $p^* = sp/(s-\alpha p)$. Z nierówności Höldera wynika ciągłość zanurzenia $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\mu)$ dla $\tilde{p} \in (0,p^*)$. Niech $\mathcal{F}$ będzie ograniczoną rodziną w $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i niech $M = \sup_{u\in\mathcal{F}} \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$. Na mocy twierdzenia 117 (dla $\theta = s$) dowolny ciąg zawarty w $\mathcal{F}$ zawiera podciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ zbieżny w $L^p(X,\mu)$.

Jeśli $\tilde{p} \in (p,p^*)$ i weźmiemy $\theta \in (0,1)$ taką, że $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$, to na mocy nierówności interpolacyjnej, mamy

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_{L^{\tilde{p}}(X,\mu)} &\leq \|u_n - u_m\|^{\theta}_{L^p(X,\mu)} \|u_n - u_m\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(X,\mu)} \\ &\leq (2CM)^{1-\theta} \|u_n - u_m\|^{\theta}_{L^p(X,\mu)}.\end{aligned}$$

Natomiast jeśli $\tilde{p} \in (0,p)$, to korzystając z nierówności Hölder otrzymujemy

$$\|u_n - u_m\|_{L^{\tilde{p}}(X,\mu)} \leq (\mu(X))^{\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{p}} \|u_n - u_m\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Stąd wynika, że u_n jest ciągiem Cauchy'ego w $L^{\tilde{p}}(X,\mu)$ dla każdego $\tilde{p} \in (0,p^*)$.

(ii) Z twierdzenia 77 wynika, że zanurzenie $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow C^{0,\alpha-s/p}(X,d)$ jest ciągłe. Ponieważ (X,d) jest całkowicie ograniczona, więc na mocy twierdzenia 38, zachodzi zwarte zanurzenie

$$C^{0,\alpha-s/p}(X,d) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(X,d)$$

dla każdej $\gamma \in (0,\alpha - s/p)$. Stąd otrzymujemy zwartość zanurzenia $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(X,d)$ dla każdej $\gamma \in (0,\alpha - s/p)$. □

Analogiczny wynik do rezultatów z podrozdziału 3.3 można pokazać dla przestrzeni $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$.

Stwierdzenie 119. *Ustalmy $\alpha, p, s \in (0,\infty)$ i niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą taką, że*

$$X \ni x \mapsto \mu\Big(B(x,1) \setminus \{x\}\Big) \in L^\infty(X,\mu).$$

Wówczas jeśli $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ oraz zbieżny w $L^p(X,\mu)$, to jest zbieżny w $W_s^{\beta,p}(X,d,\mu)$ dla każdego $\beta \in (0,\alpha)$.

Zanim przejdziemy do dowodu uzasadnimy, że powyższe odwzorowanie jest mierzalne. Ponieważ zbiór $A := \{(x,y) \in X \times X : 0 < d(x,y) < 1\}$ jest otwarty w topologii produktowej oraz (X,d) jest ośrodkowa, więc na mocy lematu 8, $A \in \mathcal{B}(X,d) \otimes \mathcal{B}(X,d)$. W szczególności oznacza to, że funkcja $f(x,y) = \chi_A(x,y)$ dla $(x,y) \in X \times X$ jest mierzalna względem miary produktowej. Zatem z twierdzenia Fubiniego odwzorowanie

$$x \mapsto \int_X \chi_A(x,y) d\mu(y) = \mu\Big(B(x,1) \setminus \{x\}\Big)$$

jest mierzalne.

Dowód. Niech $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$ oraz $M = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} \mu\Big(B(x,1) \setminus \{x\}\Big)$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon \in (0,\infty)$

$$
\begin{aligned}
[u_n - u_m]^p_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} &= \iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|(u_n-u_m)(x)-(u_n-u_m)(y)|^p}{d(x,y)^{s+\beta p}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
= \iint\limits_{0<d(x,y)<\varepsilon} & \frac{|(u_n-u_m)(x)-(u_n-u_m)(y)|^p}{d(x,y)^{s+\beta p}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
+ \iint\limits_{\varepsilon\le d(x,y)<1} & \frac{|(u_n-u_m)(x)-(u_n-u_m)(y)|^p}{d(x,y)^{s+\beta p}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
\le \varepsilon^{(\alpha-\beta)p} & \iint\limits_{0<d(x,y)<\varepsilon} \frac{|(u_n(x)-u_n(y))-(u_m(x)-u_m(y))|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
+ \frac{1}{\varepsilon^{s+\beta p}} & \iint\limits_{\varepsilon\le d(x,y)<1} |(u_n-u_m)(x)-(u_n-u_m)(y)|^p\, d\mu(y)d\mu(x) \\
\le 2^{p+1}\varepsilon^{(\alpha-\beta)p}C^p &+ \frac{2^p}{\varepsilon^{s+\beta p}} \int_X \int_{B(x,1)\setminus\{x\}} |(u_n-u_m)(x)|^p + |(u_n-u_m)(y)|^p d\mu(y)d\mu(x) \\
\le 2^{p+1}\varepsilon^{(\alpha-\beta)p}C^p &+ \frac{2^{p+1}}{\varepsilon^{s+\beta p}} \int_X |(u_n-u_m)(x)|^p\, \mu\Big(B(x,1)\setminus\{x\}\Big)\, d\mu(x) \\
\le 2^{p+1}\varepsilon^{(\alpha-\beta)p}C^p &+ \frac{2^{p+1}M}{\varepsilon^{s+\beta p}} \|u_n-u_m\|^p_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}
$$

W takim razie $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego w $W_s^{\beta,p}(X,d,\mu)$, a zatem jest zbieżny. □

Wniosek 120. *Jeśli (X,d,μ) jest przestrzenią metryczną z miarą s-regularną z dołu taką, że $\mu(X)<\infty$, to dla wszystkich $\alpha,p\in(0,\infty)$ i każdego $\beta\in(0,\alpha)$ zanurzenie*

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow W_s^{\beta,p}(X,d,\mu)$$

jest zwarte.

Dowód. Teza wynika ze stwierdzenia 119 oraz twierdzenia 117 dla $\theta = s$. □

Poniższy przykład pokazuje, że jeśli $\alpha p < \theta - s$, to teza twierdzenia 117 nie musi zachodzić.

Przykład 121. Niech $\theta\in(2,\infty)$ i $\Omega(\theta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in(0,1) \text{ i } |x|<y^{\theta-1}\}$. Jeśli $p\in(1,\infty)$ oraz $\alpha\in\Big(0,\min\{\frac{\theta-2}{p},\ \frac{p-1}{p}\}\Big)$, to zanurzenie $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))\hookrightarrow L^p(\Omega(\theta))$ nie jest zwarte.

Dowód. Przypomnijmy, że dzięki przykładowi 90 wiemy, że $l_2 \llcorner \Omega(\theta)$ jest θ-regularna z dołu. Ustalmy $n\in\mathbb{N}$ takie, że $n\ge 3$ i zdefiniujmy zbiory

$$\Omega_+(n)=\{(x,y)\in\Omega(\theta) : y<1/n\} \text{ oraz } \Omega_0(n)=\Omega(\theta)\backslash\Omega_+(n).$$

Niech

$$\gamma = \gamma(p) := \begin{cases} 1 & \text{dla } p \in (0,\theta), \\ \frac{\theta-1}{p} & \text{dla } p \in [\theta,\infty). \end{cases}$$

Rozważmy funkcję $u_n : \Omega(\theta) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$u_n(x,y) = (a_n/y^\gamma - n^\gamma a_n)\chi_{\Omega_+(n)}(x,y),$$

gdzie a_n dobierzemy później. Policzmy normę u_n w $L^p(\Omega(\theta))$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(\theta)} |u_n(x,y)|^p dl_2(x,y) &= \int_{\Omega_+(n)} (a_n/y^\gamma - n^\gamma a_n)^p dl_2(x,y) = a_n^p \int\limits_{(0,1/n)} 2y^{\theta-1}\frac{(1-(ny)^\gamma)^p}{y^{\gamma p}} dy \\ &= \frac{2a_n^p}{\gamma n^{\theta-\gamma p}} \int\limits_{(0,1)} \xi^p (1-\xi)^{\theta/\gamma-p-1} d\xi = a_n^p \frac{2B(p+1,\theta/\gamma-p)}{\gamma n^{\theta-\gamma p}},\end{aligned}$$

gdzie w trzeciej równości skorzystaliśmy z podstawienia $\xi = 1-(ny)^\gamma$, a $B(a,b)$ jest funkcją beta Eulera. Dobieramy a_n tak, aby $\|u_n\|_{L^p(\Omega(\theta))} = 1$, czyli

$$a_n^p = \frac{\gamma n^{\theta-\gamma p}}{2B(p+1,\theta/\gamma-p)}.$$

Pokażemy teraz, że u_n jest ograniczony w $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$. Ponieważ u_n już jest ograniczony w $L^p(\Omega(\theta))$, wystarczy że oszacujemy półnormę Słobodeckiego

$$\begin{aligned}[u_n]^p_{W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))} &\le \int\limits_{\Omega(\theta)}\int\limits_{\Omega(\theta)} \frac{|u_n(x_1,y_1)-u_n(x_2,y_2)|^p}{|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|^{2+\alpha p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &= \int\limits_{\Omega_+(n)}\int\limits_{\Omega_+(n)} \frac{|u_n(x_1,y_1)-u_n(x_2,y_2)|^p}{|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|^{2+\alpha p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &+ 2\int\limits_{\Omega_0(n)}\int\limits_{\Omega_+(n)} \frac{|u_n(x_1,y_1)-u_n(x_2,y_2)|^p}{|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|^{2+\alpha p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &=: I_1(n) + 2I_2(n).\end{aligned}$$

Zacznijmy od oszacowania $I_1(n)$. W tym celu opuszczamy człon $|x_1 - x_2|$ w mianowniku pod całką $I_1(n)$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}I_1(n) &\le a_n^p \int\limits_{\Omega_+(n)}\int\limits_{\Omega_+(n)} \frac{|y_1^{-\gamma} - y_2^{-\gamma}|^p}{|y_1-y_2|^{2+\alpha p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &\le a_n^p \int\limits_{\Omega_+(n)}\int\limits_{\Omega_+(n)} \frac{|y_1-y_2|^{\gamma p-\alpha p-2}}{y_1^{\gamma p} y_2^{\gamma p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &= 4a_n^p \int\limits_{(0,1/n)}\int\limits_{(0,1/n)} y_1^{\theta-\gamma p-1} y_2^{\theta-\gamma p-1} |y_1-y_2|^{\gamma p-\alpha p-2}\, dy_2\, dy_1. \qquad (3.4.1)\end{aligned}$$

W ostatniej całce podwójnej stosujemy podstawienie $y_1 = \xi/n$, $y_2 = \eta/n$ i otrzymujemy, że (3.4.1) jest równe

$$\frac{4a_n^p}{n^{2\theta-\gamma p-\alpha p-2}} \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(0,1)} \xi^{\theta-\gamma p-1}\eta^{\theta-\gamma p-1}|\xi-\eta|^{\gamma p-\alpha p-2}\, d\eta\, d\xi = \frac{4a_n^p I(\theta-\gamma p, \theta-\gamma p, \gamma p-\alpha p-1)}{n^{2\theta-\gamma p-\alpha p-2}},$$

gdzie I jest taka jak w lemacie 91. Niech $\kappa = \theta - \alpha p - 2$. Dzięki założeniu $\alpha < \frac{\theta-2}{p}$ wiemy, że $\kappa > 0$. Ponieważ γ spełnia poniższe nierówności

$$\begin{cases} \theta - \gamma p > 0, \\ \gamma p - \alpha p - 1 > 0, \\ 2(\theta - \gamma p) + \gamma p - \alpha p - 1 = \theta - \gamma p + \kappa + 1 > 1, \end{cases}$$

więc korzystając z lematu 91 i definicji a_n, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} I_1(n) &\le \frac{4a_n^p I(\theta-\gamma p, \theta-\gamma p, \gamma p-\alpha p-1)}{n^{2\theta-\gamma p-\alpha p-2}} \\ &= \frac{2\gamma n^{\theta-\gamma p}}{B(p+1, \theta/\gamma - p)} \frac{2B(\kappa+1, \gamma p-\alpha p-1)}{(\theta-\gamma p+\kappa)n^{2\theta-\gamma p-\alpha p-2}} \\ &= \frac{4\gamma B(\kappa+1, \gamma p-\alpha p-1)}{(\theta-\gamma p+\kappa)B(p+1, \theta/\gamma-p)} \frac{1}{n^\kappa}. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że $I_1(n) \to 0$ przy $n \to \infty$, więc w szczególności otrzymaliśmy, że $I_1(n)$ jest ograniczona.

Szacujemy teraz całkę $I_2(n)$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} I_2(n) &\le a_n^p \int\limits_{\Omega_0(n)} \int\limits_{\Omega_+(n)} \frac{(y_2^{-\gamma} - n^\gamma)^p}{(y_1-y_2)^{2+\alpha p}}\, dl_2(x_2,y_2) dl_2(x_1,y_1) \\ &= 4a_n^p \int\limits_{(1/n,1)} \int\limits_{(0,1/n)} y_1^{\theta-1} y_2^{\theta-\gamma p-1} \frac{(1-(ny_2)^\gamma)^p}{(y_1-y_2)^{2+\alpha p}} dy_2 dy_1 \\ &= 4a_n^p \Bigg[\int\limits_{(1/n,2/n)} \int\limits_{(0,1/n)} y_1^{\theta-1} y_2^{\theta-\gamma p-1} \frac{(1-(ny_2)^\gamma)^p}{(y_1-y_2)^{2+\alpha p}} dy_2 dy_1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} \int\limits_{(j/n,(j+1)/n)} \int\limits_{(0,1/n)} y_1^{\theta-1} y_2^{\theta-\gamma p-1} \frac{(1-(ny_2)^\gamma)^p}{(y_1-y_2)^{2+\alpha p}} dy_2 dy_1 \Bigg] \\ &= 4a_n^p \Big(A_1 + \sum_{j=2}^{n-1} A_j \Big). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Dla $y_1 > 1/n$ zachodzi $(1-(ny_2)^\gamma)^p \le n^{\gamma p}(y_1-y_2)^{\gamma p}$, zatem

$$A_1 \le n^{\gamma p} \int\limits_{(1/n,2/n)} y_1^{\theta-1} \int\limits_{(0,1/n)} y_2^{\theta-\gamma p-1}(y_1-y_2)^{\gamma p-\alpha p-2} dy_2 dy_1.$$

Po podstawieniu $y_1 = (\xi+1)/n$ oraz $y_2 = \eta/n$ otrzymamy

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{1}{n^{\theta-\gamma p}} \frac{1}{n^\kappa} \int\limits_{(0,1)} (\xi+1)^{\theta-1} \int\limits_{(0,1)} \eta^{\theta-\gamma p-1} (\xi-\eta+1)^{\gamma p-\alpha p-2} d\eta d\xi \\ &\leq \frac{2^{\theta-1}}{n^{\theta-\gamma p}} \frac{1}{n^\kappa} \int\limits_{(0,1)} \int\limits_{(0,1)} \eta^{\theta-\gamma p-1} (\xi-\eta+1)^{\gamma p-\alpha p-2} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy

$$A(\theta,\alpha,p,\gamma) = \begin{cases} 2^{\gamma p-\alpha p-2}/(\theta-\gamma p), & \text{jeśli } \gamma p-\alpha p-2 \geq 0, \\ B(\theta-\gamma p, \gamma p-\alpha p-1), & \text{jeśli } \gamma p-\alpha p-2 < 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$A_1 \leq \frac{2^{\theta-1}}{n^{\theta-\gamma p}} \frac{A(\theta,\alpha,p,\gamma)}{n^\kappa}. \tag{3.4.3}$$

Oszacujemy teraz A_j dla $2 \leq j \leq n-1$. Jeśli $y_1 \in (j/n, (j+1)/n)$ oraz $y_2 \in (0, 1/n)$, to zachodzi $(y_1-y_2)^{-2-\alpha p} \leq \left(\frac{n}{j-1}\right)^{2+\alpha p}$. Stąd

$$\begin{aligned} A_j &\leq \frac{n^{2+\alpha p}}{(j-1)^{2+\alpha p}} \int\limits_{(j/n,(j+1)/n)} y_1^{\theta-1} \int\limits_{(0,1/n)} y_2^{\theta-\gamma p-1} (1-(ny_2)^\gamma)^p dy_2 dy_1 \\ &\leq \frac{n^{2+\alpha p}}{(j-1)^{2+\alpha p}} \frac{(j+1)^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} \frac{1}{n} \frac{B(p+1,\theta/\gamma-p)}{\gamma n^{\theta-\gamma p}} \\ &\leq 3^{\theta-1} \frac{B(p+1,\theta/\gamma-p)}{\gamma n^{\theta-\gamma p}} \frac{(j-1)^{\kappa-1}}{n^\kappa}, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

gdzie w ostatniej linijce skorzystaliśmy z nierówności $j+1 \leq 3(j-1)$ prawdziwej dla $j \geq 2$. Łącząc (3.4.2), (3.4.3) oraz (3.4.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_2(n) &\leq \frac{4a_n^p}{n^{\theta-\gamma p}} \frac{1}{n^\kappa} \left(2^{\theta-1} A(\theta,\alpha,p,\gamma) + \frac{3^{\theta-1}}{\gamma} B(p+1,\theta/\gamma-p) \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)^{\kappa-1} \right) \\ &= \frac{2\gamma}{B(p+1,\theta/\gamma-p)} \left(\frac{2^{\theta-1}}{n^\kappa} A(\theta,\alpha,p,\gamma) + \frac{3^{\theta-1}}{\gamma} B(p+1,\theta/\gamma-p) \frac{1}{n^\kappa} \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)^{\kappa-1} \right) \\ &\leq \frac{2^\theta \gamma A(\theta,\alpha,p,\gamma)}{B(p+1,\theta/\gamma-p) n^\kappa} + 3^\theta \frac{1}{n^\kappa} \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)^{\kappa-1} \leq \frac{2^\theta \gamma A(\theta,\alpha,p,\gamma)}{B(p+1,\theta/\gamma-p) n^\kappa} + 3^\theta/\kappa, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie oszacowanie jest konsekwencją następującego rachunku

$$\frac{1}{n^\kappa} \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)^{\kappa-1} = \frac{1}{n^\kappa} \left(\sum_{j=1}^{n-2} j^{\kappa-1} \right) \leq \frac{1}{n^\kappa} \left(\int_0^n x^{\kappa-1} dx \right) = 1/\kappa.$$

Zatem pokazaliśmy, że ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $W_2^{\alpha,p}(\Omega(\theta))$ oraz $\|u_n\|_{L^p(\Omega(\theta))} = 1$. Z definicji $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,y) = 0$ dla wszystkich $(x,y) \in \Omega(\theta)$. To oznacza, że $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma podciągu zbieżnego w $L^p(\Omega(\theta))$. $\square$

Stwierdzenie 122. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą θ-regularną z góry i niech $s,\alpha,p\in(0,\infty)$ spełniają $\alpha p<\theta-s$. Wówczas $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)=L^p(X,\mu)$ z równoważnymi normami.*

Dowód. Niech $b\in(0,\infty)$ będzie stałą z nierówności (1.2.1). Dla dowolnego $u\in L^p(X,\mu)$ z twierdzenia Fubiniego mamy

$$
\begin{aligned}
[u]^p_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)} &= \iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\le 2^{p+1}\int\limits_X |u(x)|^p \int\limits_{B(x,1)\setminus\{x\}} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}d\mu(y)d\mu(x)\\
&\le 2^{p+1}\int\limits_X |u(x)|^p \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B(x,2^{-k})\setminus B(x,2^{-(k+1)})} \frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p}}d\mu(y)d\mu(x)\\
&\le 2^{s+\alpha p+p+1}\int\limits_X |u(x)|^p\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\mu(B(x,2^{-k}))2^{k(s+\alpha p)}\Big)d\mu(x)\\
&\le b2^{s+\alpha p+p+1}\|u\|^p_{L^p(X,\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(\alpha p+s-\theta)} = \frac{b2^{s+\alpha p+p+1}}{1-2^{\alpha p+s-\theta}}\|u\|^p_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}
$$

□

Pokażemy teraz, że przy założeniach stwierdzenia 122 zanurzenie $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)\hookrightarrow L^{\tilde p}(X,\mu)$ dla $\tilde p<p$ nie będzie zwarte.

Twierdzenie 123. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą θ-regularną z góry taką, że $\mu(X)<\infty$ i niech $s,\alpha,p\in(0,\infty)$ spełniają $\alpha p<\theta-s$. Wówczas dla wszystkich $\tilde p\in(0,p)$ zanurzenie $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)\hookrightarrow L^{\tilde p}(X,\mu)$ nie jest zwarte.*

Dowód. W związku ze stwierdzeniem 122, zachodzi równość zbiorów $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)=L^p(X,\mu)$ oraz normy $\|\cdot\|_{W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)}$, $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$ są równoważne. Ponadto z założenia o górnej regularności miary wynika, że

$$\{x\in X:\mu(\{x\})=0\}=X.$$

W związku z tym teza twierdzenia wynika z poniższego lematu. □

Lemat 124. *Niech (X,d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną i niech ν będzie miarą borelowską taką, że $\nu(X)<\infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) dla wszystkich $p\in(0,\infty]$ i wszystkich $\tilde p\in(0,p)$ zanurzenie $L^p(X,\nu)\hookrightarrow L^{\tilde p}(X,\nu)$ nie jest zwarte;

(ii) *istnieje* $p \in (0,\infty]$ *i istnieje* $\tilde{p} \in (0,p)$ *takie, że zanurzenie* $L^p(X,\nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu)$ *nie jest zwarte;*

(iii) $\nu(\{x \in X : \nu(\{x\}) = 0\}) > 0$.

Dowód. Oznaczmy przez

$$E = \{x \in X : \nu(\{x\}) = 0\} \quad \text{oraz} \quad D = X \setminus E = \{x \in X : \nu(\{x\}) > 0\}.$$

Łatwo pokazać, że D jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, a więc zbiorem borelowskim. Stąd wynika, że E również jest borelowski.

„*(i)* ⇒ *(ii)*” Ta implikacja jest oczywista.

„*(ii)* ⇒ *(iii)*” Pokażemy nie wprost, że jeśli $\nu(E) = 0$, to dla każdego $p \in (0,\infty]$ i każdego $\tilde{p} \in (0,p)$ zanurzenie $L^p(X,\nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu)$ jest zwarte. Ponieważ dla każdego $p \in (0,\infty)$ i $\tilde{p} \in (0,p)$ zachodzą ciągłe zanurzenia

$$L^\infty(X,\nu) \hookrightarrow L^p(X,\nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X,\nu),$$

więc możemy zakładać, że $p < \infty$. Skoro $\nu(E) = 0$, to

$$\nu = \sum_{x\in D} \omega_x \delta_x,$$

gdzie $\omega_x = \nu(\{x\})$.

Jeśli D jest skończony, to $L^{\tilde{p}}(X,\nu)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, a zatem ograniczone podzbiory $L^{\tilde{p}}(X,\nu)$ są prezwarte w $L^{\tilde{p}}(X,\nu)$.

Jeśli D jest przeliczalny, to możemy ponumerować jego elementy liczbami naturalnymi $D = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ i zdefiniować ciąg $\omega_k = \nu(\{x_k\})$. Z założenia $\nu(X) < \infty$ wynika, że $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$. Ponieważ dla każdego $r \in (0,\infty)$ i każdego $f \in L^r(X,\nu)$ zachodzi równość

$$\int_X |f|^r d\nu = \sum_{x\in D} |f(x)|^r \omega_x = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f(x_k)|^r \omega_k,$$

więc możemy utożsamiać $L^r(X,\nu)$ z $\ell^r(\mathbb{N},\omega)$ dla wszystkich $r \in (0,\infty)$. Ponadto dla każdego $a \in \ell^r(\mathbb{N},\omega)$ mamy

$$\|a\|^r_{\ell^r(\mathbb{N},\omega)} = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^r \omega_k = \|a\omega^{1/r}\|^r_{\ell^r(\mathbb{N})}. \tag{3.4.5}$$

Niech $\mathcal{F} \subseteq \ell^p(\mathbb{N},\omega)$ będzie ograniczoną rodziną i niech $M = \sup_{a\in\mathcal{F}} \|a\|_{\ell^p(\mathbb{N},\omega)}$. Pokażemy, że $\mathcal{F}$ jest prezwarta w $\ell^{\tilde{p}}(\mathbb{N},\omega)$. Z równości (3.4.5) wynika, że wystarczy pokazać, że rodzina

$\mathcal{F}_\omega = \{a\omega^{1/\tilde{p}} : a \in \mathcal{F}\}$ jest prezwarta w $\ell^{\tilde{p}}(\mathbb{N})$. Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ z nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty} |a_k \omega_k^{1/\tilde{p}}|^{\tilde{p}} &= \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|^{\tilde{p}} \omega_k \\ &\leq \Big(\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|^p \omega_k \Big)^{\frac{\tilde{p}}{p}} \Big(\sum_{k=N}^{\infty} \omega_k \Big)^{\frac{p-\tilde{p}}{p}} \\ &\leq M^{\tilde{p}} \Big(\sum_{k=N}^{\infty} \omega_k \Big)^{\frac{p-\tilde{p}}{p}}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\omega \in \ell^1(\mathbb{N})$, więc wynika stąd, że $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |a_k \omega_k^{1/\tilde{p}}|^{\tilde{p}} = 0$ jednostajnie ze względu na $a \in \mathcal{F}$. Ponadto z powyższego rachunku wynika, że rodzina $\mathcal{F}_\omega$ jest ograniczona w $\ell^{\tilde{p}}(\mathbb{N})$. Z klasycznego twierdzenia Frécheta o zwartości otrzymujemy, że $\mathcal{F}_\omega$ jest prezwarta w $\ell^{\tilde{p}}(\mathbb{N})$.

„*(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*” Wystarczy pokazać tezę dla $p = \infty$. Istotnie, jeśli pokażemy, że dla dowolnego $\tilde{p} \in (0, p)$ zanurzenie

$$L^\infty(X, \nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X, \nu)$$

nie jest zwarte, to ponieważ zachodzi ciągłe zanurzenie

$$L^\infty(X, \nu) \hookrightarrow L^p(X, \nu),$$

więc poniższe zanurzenie również nie może być zwarte

$$L^p(X, \nu) \hookrightarrow L^{\tilde{p}}(X, \nu).$$

Pokażemy, że $\nu \llcorner E$ jest miarą bezatomową. Przypuśćmy, że $A \subseteq E$ jest atomem względem $\nu \llcorner E$, tzn. $\nu \llcorner E(A) > 0$ oraz dla każdego zbioru $B \subseteq A$ takiego, że $\nu \llcorner E(B) < \nu \llcorner E(A)$ zachodzi $\nu \llcorner E(B) = 0$. Wówczas dla każdego $x \in A \cap E$ z definicji zbioru E mamy

$$\nu(B(x, r)) \to \nu(\{x\}) = 0$$

przy $r \to 0^+$. Zatem możemy znaleźć $r_x \in (0, \infty)$ takie, że

$$\nu \llcorner E(B(x, r_x) \cap A) \leq \nu(B(x, r_x)) < \nu \llcorner E(A).$$

Zakładaliśmy, że A jest atomem, więc dla każdego $x \in X$

$$\nu \llcorner E(B(x, r_x) \cap A) = 0.$$

Z drugiej strony $A \cap E \subseteq \bigcup_{x \in A \cap E} B(x, r_x)$. Ponieważ (X, d) jest ośrodkowa, więc $(A \cap E, d)$ również jest ośrodkowa. Z twierdzenia Lindelöfa wynika, że możemy znaleźć ciąg $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A \cap E$ taki, że

$$A \cap E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_{x_i}) \cap A \cap E.$$

Stąd dostajemy

$$0 < \nu \llcorner E(A) = \nu \llcorner E\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_{x_i}) \cap A\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu \llcorner E\Big(B(x_i, r_{x_i}) \cap A\Big) = 0.$$

Z powyższej sprzeczności wnioskujemy, że $\nu \llcorner E$ jest bezatomowa.

Skoro $\nu \llcorner E$ jest bezatomowa, możemy zastosować twierdzenie Sierpińskiego [97] i znaleźć dwa rozłączne zbiory $E_{(0)}, E_{(1)} \subseteq E$ takie, że $E_{(0)} \cup E_{(1)} = E$ oraz

$$\nu \llcorner E(E_{(0)}) = \nu(E_{(0)}) = \nu \llcorner E(E_{(1)}) = \nu(E_{(1)}) = \nu(E)/2.$$

W kolejnym kroku stosujemy twierdzenie Sierpińskiego dla zbiorów $E_{(0)}$, $E_{(1)}$ i znajdujemy parami rozłączne zbiory $E_{(0,0)}, E_{(0,1)}, E_{(1,0)}, E_{(1,1)}$ takie, że

$$E_{(0,0)} \cup E_{(0,1)} = E_{(0)}, \quad E_{(1,0)} \cup E_{(1,1)} = E_{(1)}$$

oraz

$$\nu(E_{(0,0)}) = \nu(E_{(0,1)}) = \nu(E_{(1,0)}) = \nu(E_{(1,1)}) = \nu(E)/4.$$

Kontynuujemy ten proces indukcyjnie. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy zbiory E_b dla każdego $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathbb{Z}_2^k$, które są parami rozłączne, $\nu(E_b) = \nu(E)/2^k$ oraz dla każdego $\hat{b} \in \mathbb{Z}_2^{k-1}$ zachodzi $E_{\hat{b}} = E_{(\hat{b},0)} \cup E_{(\hat{b},1)}$. Ustalmy $b \in \mathbb{Z}_2^k$ i zastosujmy twierdzenie Sierpińskiego do zbioru E_b. Otrzymujemy rozłączne zbiory $E_{(b,0)}, E_{(b,1)}$ takie, że $E_{(b,0)} \cup E_{(b,1)} = E_b$ oraz

$$\nu(E_{(b,0)}) = \nu(E_{(b,1)}) = \nu(E_b)/2 = \nu(E)/2^{k+1}.$$

Zdefiniujmy teraz ciąg funkcji $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ w następujący sposób

$$f_k = \sum_{\{b \in \mathbb{Z}_2^k : b_k = 1\}} \chi_{E_b}.$$

Ponieważ zbiory $\{E_b\}_{b \in \mathbb{Z}_2^k}$ są parami rozłączne, więc $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony w $L^\infty(X, \nu)$. Z drugiej strony jeśli ustalimy $k, l \in \mathbb{N}$ takie, że $k < l$, to z konstrukcji zbiorów E_b wynika, że

$$E = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}_2^k} E_b \quad \text{oraz} \quad E_b = \bigcup_{\{c \in \mathbb{Z}_2^l : c_j = b_j \text{ dla } 1 \leq j \leq k\}} E_c.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_l\|^{\tilde{p}}_{L^{\tilde{p}}(X,\nu)} &= \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^k} \int_{E_b} |f_k(x) - f_l(x)|^{\tilde{p}} d\nu(x) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^k} \sum_{\{c\in\mathbb{Z}_2^l : c_j = b_j \text{ dla } 1\le j\le k\}} \int_{E_c} |f_k(x) - f_l(x)|^{\tilde{p}} d\nu(x) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^k} \sum_{\{c\in\mathbb{Z}_2^l : c_j = b_j \text{ dla } 1\le j\le k \text{ oraz } b_k\neq c_l\}} \int_{E_c} 1\, d\nu(x) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^k} 2^{l-k-1}\frac{\nu(E)}{2^l} = \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^k} \frac{\nu(E)}{2^{k+1}} = \frac{\nu(E)}{2}.
\end{aligned}$$

Z powyższej równości wynika, że $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nie zawiera podciągu zbieżnego w $L^{\tilde{p}}(X,\nu)$. $\square$

3.5 Pozostałe wyniki i przykłady

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się problemem, kiedy zanurzenia $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$ i $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$ nie są zwarte, a na koniec zaprezentujemy kilka przykładów.

Twierdzenie 125. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą i załóżmy, że istnieje $\delta_0 \in (0,\infty)$ taka, że μ jest δ-podwajająca dla każdej $\delta \in (0,\delta_0]$. Ponadto załóżmy, że $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ i $q \in (0,\infty]$ lub $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ i $q = \infty$. Jeśli przynajmniej jedno z zanurzeń*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu) \quad \textit{lub} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$$

jest zwarte, to (X,d) jest całkowicie ograniczona.

Dowód. Zaczniemy od udowodnienia poniższego lematu.

Lemat 126. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą, która jest δ-podwajająca dla pewnej $\delta \in (0,\infty)$. Załóżmy, że $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ i $q \in (0,\infty]$ lub $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ i $q = \infty$. Jeśli przynajmniej jedno z zanurzeń*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu) \quad \textit{lub} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu) \tag{3.5.1}$$

jest zwarte, to każdy zbiór 3δ-rozdzielony w (X,d) jest skończony.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 98 wystarczy pokazać tezę dla przestrzeni $M^{1,p}(X,d,\mu)$. Przypuśćmy, że $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest nieskończonym zbiorem 3δ-rozdzielonym w (X,d). Wówczas dla wszystkich $k,l \in \mathbb{N}$ takich, że $k \neq l$, $B(x_k,\delta) \cap B(x_l,2\delta) = \emptyset$. Istotnie, jeśli $y \in B(x_k,\delta) \cap B(x_l,2\delta)$ dla pewnych $k,l \in \mathbb{N}$ takich, że $k \neq l$, to wówczas

$$3\delta \leq d(x_k,x_l) \leq d(x_k,y) + d(y,x_l) < 3\delta,$$

co jest oczywistą sprzecznością.

Teraz dla każdego $j \in \mathbb{N}$ stosujemy lemat 65 i znajdujemy funkcję $\phi_j : X \to [0,1]$ taką, że $\phi_j \equiv 1$ na $B(x_j,\delta)$ oraz $\phi_j \equiv 0$ na $X \setminus B(x_j,2\delta)$. Definiujemy ciąg funkcji $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$f_j(x) = \frac{1}{\mu(B(x_j,\delta))^{1/p}}\,\phi_j(x) \quad \text{ dla } x \in X.$$

Zauważmy, że z lematu 65 i warunku δ-podwajania wynika

$$\begin{aligned}
\|f_j\|_{M^{1,p}(X,d,\mu)} &= \frac{1}{\mu(B(x_j,\delta))^{1/p}}\Big(\|\phi_j\|_{L^p(X,\mu)} + \|\phi_j\|_{\dot{M}^{1,p}(X,d,\mu)}\Big) \\
&\leq \frac{1}{\mu(B(x_j,\delta))^{1/p}}\left(\mu(B(x_j,2\delta))^{1/p} + \frac{\mu(B(x_j,2\delta))^{1/p}}{\operatorname{dist}(X\setminus B(x_j,2\delta), B(x_j,\delta))}\right) \\
&\leq \frac{\mu(B(x_j,2\delta))^{1/p}}{\mu(B(x_j,\delta))^{1/p}}\left[1+\frac{1}{\delta}\right] \leq C_\delta^{1/p}(\delta+1)/\delta.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $M^{1,p}(X,d,\mu)$, więc z założenia o zwartości powinien posiadać podciąg zbieżny w $L^p(X,\mu)$. Jednakże jeśli $k,l \in \mathbb{N}$ są takie, że $k \neq l$, to zachodzi $B(x_k,\delta) \cap B(x_l,2\delta) = \emptyset$, więc

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_l\|^p_{L^p(X,\mu)} &\geq \int\limits_{B(x_k,\delta)\cup B(x_l,\delta)} |f_k(x) - f_l(x)|^p\, d\mu(x) \\
&= \int\limits_{B(x_k,\delta)} |f_k(x)|^p\, d\mu(x) + \int\limits_{B(x_l,\delta)} |f_l(x)|^p\, d\mu(x) = 2.
\end{aligned}$$

To oznacza, że $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ nie posiada podciągu zbieżnego w $L^p(X,\mu)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. □

Ustalmy teraz $\varepsilon \in (0,\infty)$ i niech $\delta = \min\{\varepsilon/3, \delta_0\}$. Niech A będzie maksymalnym zbiorem 3δ-rozdzielonym. Z lematu 126 otrzymujemy, że A jest skończony, natomiast z uwagi 33 wynika

$$X = \bigcup_{a\in A} B(a,3\delta) \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon).$$

To oznacza, że A jest skończoną ε-siecią w (X,d). Z dowolności ε wynika całkowita ograniczoność (X,d). □

Twierdzenie 127. *Niech (X,d,μ) będzie przestrzenią metryczną z miarą taką, że $\mu(X) < \infty$, $\operatorname{diam} X = \infty$ oraz μ spełnia warunek podwajania w nieskończoności. Załóżmy, że $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ i $q \in (0,\infty]$ lub $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ i $q = \infty$. Wówczas zanurzenia*

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu) \quad \textit{oraz} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu) \tag{3.5.2}$$

nie są zwarte.

Dowód. Pokażemy tezę dla przestrzeni $M^{1,p}(X,d,\mu)$. Niech $x_0 \in X$ będzie punktem z warunku podwajania w nieskończoności i niech $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem takim, że $R_n \geq 1$, $R_n \to \infty$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(X \setminus B(x_0,R_n))}{\mu(X \setminus B(x_0,2R_n))} = \liminf_{R\to\infty} \frac{\mu(X \setminus B(x_0,R))}{\mu(X \setminus B(x_0,2R))} < \infty.$$

Niech

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(X \setminus B(x_0,R_n))}{\mu(X \setminus B(x_0,2R_n))}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$f_n = \frac{1}{[\mu(X \setminus B(x_0,2R_n))]^{1/p}}\, \phi_n,$$

gdzie $\phi_n : X \to [0,1]$ jest lipszycowską funkcją z lematu 65, która spełnia $\phi_n \equiv 0$ w $B(x_0,R_n)$ oraz $\phi_n \equiv 1$ na $X \setminus B(x_0,2R_n)$. Z lematu 65 i definicji ciągu R_n wynika również, że

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{M^{1,p}(X,d,\mu)} &\leq \frac{[\mu(X \setminus B(x_0,R_n))]^{1/p}}{[\mu(X \setminus B(x_0,2R_n))]^{1/p}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(B(x_0,R_n), X \setminus B(x_0,2R_n))}\right)\\ &\leq 2C^{1/p},\end{aligned}$$

ponieważ $\operatorname{dist}(B(x_0,R_n), X \setminus B(x_0,2R_n)) \geq R_n \geq 1$. Zatem $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji ograniczonym w $M^{1,p}(X,d,\mu)$.

Przypuśćmy, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest prezwarty w $L^p(X,\mu)$. Wówczas możemy znaleźć podciąg $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f_{n_j}|^p \, d\mu \to 0 \quad \textit{jednostajnie ze względu na } j \textit{ przy } R \to \infty.$$

Jednakże jest to niemożliwe, gdyż

$$\int\limits_{X\setminus B(x_0,2R_n)} |f_n|^p \, d\mu = 1 \qquad \textit{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

To oznacza, że zanurzenie $M^{1,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$ nie może być zwarte, co kończy dowód twierdzenia. □

Przykład 128. Niech $(\mathbb{R}_+, d, \mu)$, gdzie $d = |\cdot|$ jest odległością euklidesową oraz μ jest dana przez $d\mu = e^{-x^\beta} dx$ dla $\beta \in (0,\infty)$. Wówczas $\mu(\mathbb{R}_+) < \infty$ oraz:

(i) jeśli $\beta \in (1,\infty)$, to μ jest całkowalna, więc dla wszystkich $\alpha, p \in (0,\infty)$ i $q \in (0,\infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \tag{3.5.3}$$

są zwarte;

(ii) jeśli $\beta \in (0,1]$, to μ jest δ-podwajająca dla każdej $\delta \in (0,\infty)$, zatem dla $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ i $q \in (0,\infty]$ lub $p \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ i $q = \infty$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \tag{3.5.4}$$

nie są zwarte.

Dowód. (i) Ustalmy $r \in (0,\infty)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \, d\mu(x) &= \int\limits_{(r,\infty)} \frac{e^{-x^\beta}}{\int_{x-r}^{x+r} e^{-y^\beta} dy} dx + \int\limits_{(0,r)} \frac{e^{-x^\beta}}{\int_0^{x+r} e^{-y^\beta} dy} dx \\
&\le \int\limits_{(r,\infty)} \frac{e^{-x^\beta}}{\int_{x-r}^{x-r/2} e^{-y^\beta} dy} dx + \int\limits_{(0,r)} \frac{e^{-x^\beta}}{(x+r)e^{-(x+r)^\beta}} dx \\
&\le \int\limits_{(r,\infty)} \frac{e^{-x^\beta}}{\frac{r}{2} e^{-(x-\frac{r}{2})^\beta}} dx + \frac{1}{r} \int\limits_{(0,r)} e^{-x^\beta + (x+r)^\beta} dx \\
&\le \frac{2}{r} \int\limits_{(r,\infty)} e^{-x^\beta + (x-\frac{r}{2})^\beta} dx + \frac{1}{r} \int\limits_{(0,r)} e^{(2r)^\beta} dx \\
&\le \frac{2}{r} \int\limits_{(r,\infty)} e^{-\beta \frac{r}{2}(x-\frac{r}{2})^{\beta-1}} dx + e^{(2r)^\beta} < \infty,
\end{aligned}$$

gdzie przy przejściu od trzeciej do czwartej nierówności skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange'a. Zatem μ jest całkowalna, więc zwartość zanurzeń (3.5.3) wynika z uwagi 105.

(ii) Niech $x \in \mathbb{R}_+$ i $\delta \in (0, \infty)$. Jeśli $x > 2\delta$, to wówczas

$$\frac{\mu(B(x,2\delta))}{\mu(B(x,\delta))} = \frac{\int_{x-2\delta}^{x+2\delta} e^{-y^\beta} dy}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-y^\beta} dy} \leq \frac{\int_{x-2\delta}^{x+2\delta} e^{-y^\beta} dy}{\int_{x-\delta}^{x} e^{-y^\beta} dy} \leq \frac{4\delta e^{-(x-2\delta)^\beta}}{\delta e^{-x^\beta}} = 4e^{-(x-2\delta)^\beta + x^\beta}.$$

Z β-Hölderowskiej ciągłości funkcji $f(t) = t^\beta$ wynika

$$x^\beta - (2\delta)^\beta \leq (x - 2\delta)^\beta$$

i stąd

$$\frac{\mu(B(x,2\delta))}{\mu(B(x,\delta))} \leq 4e^{(2\delta)^\beta}.$$

Z drugiej strony jeśli $x \leq 2\delta$ to mamy

$$\frac{\mu(B(x,2\delta))}{\mu(B(x,\delta))} = \frac{\int_{0}^{x+2\delta} e^{-y^\beta} dy}{\int_{\max\{0,x-\delta\}}^{x+\delta} e^{-y^\beta} dy} \leq \frac{x+2\delta}{\int_{x}^{x+\delta} e^{-y^\beta} dy} \leq \frac{4\delta}{\delta e^{-(x+\delta)^\beta}} = 4e^{(x+\delta)^\beta} \leq 4e^{(3\delta)^\beta}.$$

Zatem μ jest δ-podwajająca dla wszystkich $\delta \in (0, \infty)$. Z twierdzenia 125 wynika, że gdyby przynajmniej jedno z zanurzeń (3.5.4) było zwarte to $(\mathbb{R}_+, d)$ byłoby całkowicie ograniczone (a nie jest), zatem żadne z zanurzeń (3.5.4) nie może być zwarte. □

Przykład 129. Niech $(\mathbb{R}_+, d, \mu)$, gdzie $d = |\cdot|$ jest odległością euklidesową oraz μ jest dana przez $d\mu = e^{x^\beta} dx$ dla $\beta \in [0, \infty)$. Wówczas $\mu(\mathbb{R}_+) = \infty$ oraz:

(i) jeśli $\beta \in (1, \infty)$, to μ jest całkowalna, więc dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$ i $q \in (0, \infty]$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu)$$

są zwarte;

(ii) jeśli $\beta \in [0, 1]$, to μ jest δ-podwajająca dla każdej $\delta \in (0, \infty)$, zatem dla $p \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ i $q \in (0, \infty]$ lub $p \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$ i $q = \infty$ zanurzenia

$$M^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu) \quad \text{oraz} \quad N^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}_+, d, \mu) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mu)$$

nie są zwarte.

Dowód. (i) Niech $x \in \mathbb{R}_+$ i $r \in (0, \infty)$. Wówczas

$$\mu(B(x,r)) = \int_{\max\{0,x-r\}}^{x+r} e^{y^\beta}\,dy \geq \int_{x+r/2}^{x+r} e^{y^\beta}\,dy \geq \frac{r}{2} e^{(x+r/2)^\beta}.$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, otrzymujemy

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{x^\beta}}{\mu(B(x,r))} dx \leq \frac{2}{r} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{e^{(x+r/2)^\beta - x^\beta}} \leq \frac{2}{r} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{e^{\frac{\beta r}{2} x^{\beta-1}}} < \infty.$$

Stąd μ jest całkowalna.

(ii) Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}_+$ i $\delta \in (0, \infty)$ zachodzi

$$\frac{\mu(B(x,2\delta))}{\mu(B(x,\delta))} = \frac{\int\limits_{\max\{0,x-2\delta\}}^{x+2\delta} e^{y^\beta}\,dy}{\int\limits_{\max\{0,x-\delta\}}^{x+\delta} e^{y^\beta}\,dy} \leq \frac{\int\limits_{x-2\delta}^{x+2\delta} e^{y^\beta}\,dy}{\int\limits_{x}^{x+\delta} e^{y^\beta}\,dy} \leq \frac{4\delta e^{(x+2\delta)^\beta}}{\delta e^{x^\beta}} \leq 4e^{(2\delta)^\beta},$$

ponieważ $(x+2\delta)^\beta \leq x^\beta + (2\delta)^\beta$. Zatem μ jest δ-podwajająca dla wszystkich $\delta \in (0, \infty)$.

$\square$

Poniższy przykład pokazuje, że istnieją przestrzenie metryczne z miarą takie, że zachodzi zwartość zanurzeń przestrzeni $M^\alpha_{p,q}$ i $N^\alpha_{p,q}$ w L^p, pomimo że przestrzeń metryczna w żadnym punkcie nie jest lokalnie całkowicie ograniczona.

Przykład 130. (Skomplikowany grzebień) Istnieje ograniczona przestrzeń metryczna z miarą (G, d, μ) taka, że żadna kula w (G, d) nie jest całkowicie ograniczona[9], ale dla wszystkich $\alpha, p \in (0, \infty)$ i $q \in (0, \infty]$ zanurzenia $M^\alpha_{p,q}(G, d, \mu) \hookrightarrow L^p(G, \mu)$ oraz $N^\alpha_{p,q}(G, d, \mu) \hookrightarrow L^p(G, \mu)$ są zwarte.

Dowód. Skonstruujemy ograniczoną przestrzeń metryczną taką, że żadna kula nie jest całkowicie ograniczona, a następnie zadamy na niej niezdegenerowaną miarę borelowską, która jest całkowalna.

Krok 1: Konstrukcja (G, d).

Niech D będzie przeliczalnym i gęstym podzbiorem przedziału $(0, 1/4)$. Konstruujemy $G \subseteq (0, 1)^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób. Niech $I = \{(t, 0, 0, \dots) : t \in (0, 1/4)\}$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $\vec{d} := (d_1, d_2, \dots, d_n) \in D^n$ rozważmy zbiór

$$I_{\vec{d}} := \Big\{(d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, t, 0, 0, \dots) : t \in (0, 2^{-n-2})\Big\},$$

[9] W szczególności (G, d) nie jest całkowicie ograniczona.

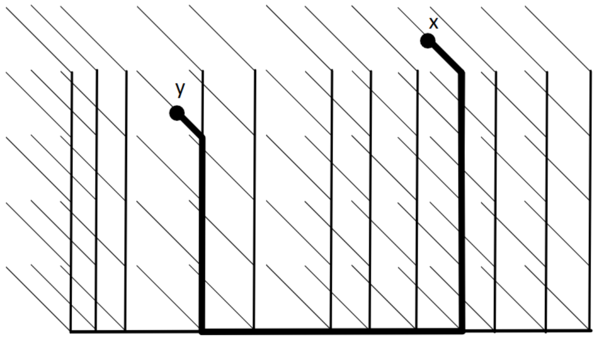
i definiujemy $G \subseteq (0,1)^{\mathbb{N}}$ jako

$$G = I \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\vec{d} \in D^n} I_{\vec{d}}.$$

Wyposażamy G w następującą metrykę: Niech $x, y \in G$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jeśli $x = y$, to kładziemy $d(x,y) := 0$. Natomiast jeśli $x \neq y$, to definiujemy $\kappa = \kappa(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ i kładziemy

$$d(x,y) := |x_\kappa - y_\kappa| + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} (x_n + y_n).$$

Poniższy rysunek ilustruje jak jest realizowana odległość pomiędzy dwoma punktami w (G,d).



Rysunek 3.1: Odległość pomiędzy $x, y \in G$.

Pokażemy, że (G,d) jest przestrzenią metryczną. Symetria i niezdegenerowanie są oczywiste, więc wystarczy pokazać nierówność trójkąta. Niech $x, y, z \in G$ będą takie, że $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$ i rozważmy trzy przypadki.

a) $\kappa(x,z) = \kappa(x,y)$.

Dla $n < \kappa(x,y)$ mamy $x_n = z_n$ i $x_n = y_n$, więc $y_n = z_n$. Stąd wynika, że $\kappa(z,y) \geq \kappa(x,y)$. Jeśli $\kappa(z,y) = \kappa(x,y)$, to natychmiast otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_{\kappa(x,y)} - y_{\kappa(x,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)+1}^{\infty} (x_n + y_n) \\ &\leq |x_{\kappa(x,y)} - z_{\kappa(x,y)}| + |z_{\kappa(x,y)} - y_{\kappa(x,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)+1}^{\infty} (x_n + z_n + y_n + z_n) \\ &= |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n + z_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (z_n + y_n) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Natomiast jeśli $\kappa(z,y) > \kappa(x,y)$, to dla $n < \kappa(z,y)$ $y_n = z_n$, zatem

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_{\kappa(x,y)} - y_{\kappa(x,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)+1}^{\infty} (x_n + y_n) \\ &= |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n) + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\kappa(z,y)} (y_n) + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n) \\ &\leq |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n) + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\kappa(z,y)} (z_n) + |y_{\kappa(z,y)} - z_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n) \\ &\leq |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n + z_n) + |y_{\kappa(z,y)} - z_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n + z_n) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

b) $\kappa(x,z) < \kappa(x,y)$

Z powyższej nierówności mamy, $y_{\kappa(x,z)} = x_{\kappa(x,z)} \neq z_{\kappa(x,z)}$. Stąd $\kappa(z,y) \leq \kappa(x,z)$. Gdyby zachodziła ostra nierówność, to otrzymalibyśmy $x_{\kappa(z,y)} = z_{\kappa(z,y)} \neq y_{\kappa(z,y)}$, co by oznaczało, że $\kappa(x,y) \leq \kappa(z,y) < \kappa(x,z) < \kappa(x,y)$. Zatem musi zachodzić równość $\kappa(z,y) = \kappa(x,z)$. Wówczas

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_{\kappa(x,y)} - y_{\kappa(x,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)+1}^{\infty} (x_n + y_n) \\ &\leq |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)}^{\infty} (x_n + y_n) \\ &\leq |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n + z_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n + z_n) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

c) $\kappa(x,z) > \kappa(x,y)$

Podobnie jak w przypadku *b)*, z powyższej nierówności wynika, że $z_{\kappa(x,y)} = x_{\kappa(x,y)} \neq y_{\kappa(x,y)}$, co oznacza że $\kappa(z,y) \leq \kappa(x,y)$. Gdyby zachodziła ostra nierówność, to otrzymalibyśmy $x_{\kappa(z,y)} = y_{\kappa(z,y)} \neq z_{\kappa(z,y)}$, co by oznaczało, że $\kappa(x,z) \leq \kappa(z,y) < \kappa(x,y) < \kappa(x,z)$. Zatem musi zachodzić równość $\kappa(z,y) = \kappa(x,y)$, a ponieważ $\kappa(x,y) < \kappa(x,z)$, zatem

$x_{\kappa(x,y)} = z_{\kappa(z,y)}$. Stąd

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= |x_{\kappa(x,y)} - y_{\kappa(x,y)}| + \sum_{n=\kappa(x,y)+1}^{\infty} (x_n + y_n) \\
&= \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (x_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n) \\
&= \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\kappa(x,z)} (x_n) + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n) \\
&\leq \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\kappa(x,z)} (z_n) + |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n) \\
&\leq |x_{\kappa(x,z)} - z_{\kappa(x,z)}| + \sum_{n=\kappa(x,z)+1}^{\infty} (x_n + z_n) + |z_{\kappa(z,y)} - y_{\kappa(z,y)}| + \sum_{n=\kappa(z,y)+1}^{\infty} (y_n + z_n) \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

Krok 2: (G,d) jest ograniczona, ale żadna kula w (G,d) nie jest całkowicie ograniczona. (G,d) jest ograniczona, ponieważ dla $x, y \in G$ mamy

$$d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n-1} + 2^{-n-1}) = 1.$$

Ustalmy teraz $r \in (0,\infty)$ i $x \in G$. Niech $n = 0$, jeśli $x = (t, 0, 0\dots)$ dla pewnego $t \in (0, 1/4)$. W przeciwnym razie niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $x = (d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, t, 0, 0, \dots)$ dla pewnego $t \in (0, 2^{-n-2})$ oraz $(d_1, \dots, d_n) \in D^n$. Wystarczy pokazać, że kula $B(x, \tilde{r})$ nie jest całkowicie ograniczona, gdzie $\tilde{r} = \min\{r, t\}$. Ustalmy $\varepsilon \in (0, \tilde{r}/2)$ i zdefiniujmy zbiór

$$E = \{e \in D : \tfrac{e}{2^n} \in (t - \tfrac{\tilde{r}}{2}, t)\}.$$

D jest przeliczalnym zbiorem gęstym w $(0, 1/4)$, więc zbiór E również jest przeliczalny. Dla $e \in E$ definiujemy

$$F_e^{\varepsilon} = \begin{cases} \left\{(d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, e/2^n, s, 0, 0, \dots) : s \in (\varepsilon, \frac{\tilde{r}}{2})\right\}, & \text{jeśli } n \in \mathbb{N}, \\ \left\{e, s, 0, 0, \dots) : s \in (\varepsilon, \frac{\tilde{r}}{2})\right\}, & \text{jeśli } n = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $\frac{\tilde{r}}{2} \leq \frac{t}{2} < 2^{-n-3}$, więc dla każdego $e \in E$, $F_e^{\varepsilon} \subseteq G$. Ponadto dla każdego $e \in E$ $F_e^{\varepsilon} \subseteq B(x, \tilde{r})$. Natomiast jeśli $e_1, e_2 \in E$ są takie, że $e_1 \neq e_2$, to dla dowolnych $y_1 \in F_{e_1}^{\varepsilon}$ i $y_2 \in F_{e_2}^{\varepsilon}$ zachodzi

$$d(y_1, y_2) > 2\varepsilon.$$

Z drugiej strony gdyby istniała skończona ε-sieć $\{x_i\}_{i=1}^N$ kuli $B(x,\tilde{r})$, to ponieważ zbiór E jest przeliczalny oraz

$$\bigcup_{e\in E} F_e^\varepsilon \subseteq B(x,\tilde{r}),$$

więc dla pewnego $j \in \{1,\dots,N\}$ znaleźlibyśmy $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$ oraz $y_1 \in F_{e_1}^\varepsilon$, $y_2 \in F_{e_2}^\varepsilon$ takie, że $y_1, y_2 \in B(x_j,\varepsilon)$. Z nierówności trójkąta otrzymalibyśmy, że

$$d(y_1,y_2) \le d(y_1,x_j) + d(x_j,y_2) < 2\varepsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności. Stąd wynika, że kula $B(x,r)$ nie jest całkowicie ograniczona.

Krok trzeci: Odpowiednie ponumerowanie elementów ze zbioru $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D^n$.

Ponumerujemy teraz elementy zbioru $\bigcup_{n=1}^\infty D^n$, tak aby ułatwić zadanie na G σ-ciała borelowskiego i miary całkowalnej. Niech $\phi : \mathbb{P} \to D$ będzie dowolną bijekcją pomiędzy zbiorem liczb pierwszych $\mathbb{P}$ i D. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $\overrightarrow{p} = (p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{P}^n$ definiujemy bijekcję pomiędzy $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{P}^n$ i $\bigcup_{n=1}^\infty D^n$ wzorem $\Phi(\overrightarrow{p}) = (\phi(p_1),\dots,\phi(p_n))$. Zdefiniujemy indukcyjnie bijekcję Ψ pomiędzy zbiorem $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{P}^n$ a zbiorem liczb naturalnych. Przejdziemy przez kilka pierwszych kroków, żeby podkreślić ideę konstrukcji. Dla 2 i 3 kładziemy $\Psi(2) = 1, \Psi(3) = 2$. Ponieważ $4 = 2\cdot 2$, definiujemy $\Psi((2,2)) = 3$. Natomiast 5 jest liczbą pierwszą, więc kładziemy $\Psi(5) = 4$. Teraz, skoro $6 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$, więc $\Psi((2,3))$ oraz $\Psi((3,2))$ definiujemy dowolnie przy użyciu liczb 5 i 6.

Dla $m \in \mathbb{N}$ takich, że $m \ge 2$, zdefiniujmy zbiór

$$G_m = \Big\{(p_1,p_2,\dots,p_{N_k}) \in \mathbb{P}^{N_k} : \Pi_{i=1}^{N_k} p_i = k \text{ dla } 2 \le k \le m\Big\}.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego $m \ge 2$ zdefiniowaliśmy bijekcję

$$\Psi : G_m \to \{1,2,\dots,\#G_m\}$$

taką, że dla każdego $2 \le l < k \le m$, jeśli $\overrightarrow{p} = (p_1,\dots,p_{N_l})$ oraz $\overrightarrow{q} = (q_1,\dots,q_{N_k})$ są rozkładami na czynniki pierwsze odpowiednio l oraz k to $\Psi(\overrightarrow{p}) < \Psi(\overrightarrow{q})$.

Niech $\tilde{\Psi}$ będzie dowolną bijekcją pomiędzy $G_{m+1}\setminus G_m$ oraz $\{n \in \mathbb{N} : \#G_m + 1 \le n \le \#G_{m+1}\}$. Rozszerzamy Ψ na G_{m+1}, kładąc $\Psi_{|G_{m+1}\setminus G_m} = \tilde{\Psi}$.

Niech teraz $b_k := \Phi \circ \Psi^{-1}(k)$. Definiujemy $J_0 = I$ oraz dla $k \ge 1$ $J_k := I_{b_k}$. Zatem $G = \bigcup_{k=0}^\infty J_k$.

Krok czwarty: Definicja σ-ciała i miary borelowskiej.

Dla $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ niech $a_k = \operatorname{diam}(J_k)$ i rozważmy funkcję $f_k : (0,a_k) \to J_k$ daną wzorem

$f_k(t) = (d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, t, 0, 0, \dots)$, gdzie $(d_1, d_2, \dots, d_n) = b_k$, jeśli $k \in \mathbb{N}$ oraz $f_0 : (0, 1/4) \to J_0$ jest dana wzorem $f_0(t) = (t, 0, 0, \dots)$, jeśli $k = 0$. Oznaczmy przez L_k σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a zawartych w $(0, a_k)$. Ponadto zdefiniujmy ciąg funkcji $g_k : (0, a_k) \to \mathbb{R}_+$ wzorem $g_k(y) = \exp(-(y+k)^2)$ dla $y \in (0, a_k)$.

Rozważamy miary ν_k zdefiniowane na L_k poprzez $d\nu_k = g_k dl_1$. Przy pomocy odwzorowań f_k, na każdym J_k definiujemy σ-ciało obrazowe

$$\mathfrak{M}_k = f_k \# L_k = \{A_k \subseteq J_k : f_k^{-1}(A_k) \in L_k\}$$

oraz miarę obrazową

$$\mu_k(A_k) = f_k \# \nu_k(A_k) = \nu(f_k^{-1}(A_k))$$

dla $A_k \in \mathfrak{M}_k$. Teraz definiujemy

$$\mathfrak{M} = \left\{ A \subseteq G : A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \text{ dla pewnych } A_k \in \mathfrak{M}_k \right\}$$

oraz

$$\mu(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(A \cap J_k) \qquad \text{dla wszystkich } A \in \mathfrak{M}.$$

•) $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem.

Ponieważ $\mathfrak{M}_k$ są σ-ciałami, więc natychmiast otrzymujemy, że $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Jeśli $A \in \mathfrak{M}$, $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ dla pewnych $A_k \in \mathfrak{M}_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to ponieważ $A_k \subseteq J_k$ oraz $\{J_k\}_{k=0}^{\infty}$ są parami rozłączne, więc

$$G \setminus A = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k \setminus A_k \in \mathfrak{M}.$$

Natomiast jeśli mamy rodzinę zbiorów $\{A^i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$, to dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieją zbiory $A_k^i \in \mathfrak{M}_k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że

$$A^i = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^i.$$

Wtedy

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^i = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_k^i.$$

Ponieważ $\mathfrak{M}_k$ są σ-ciałami, więc stąd wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$A_k := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_k^i \in \mathfrak{M}_k.$$

Zatem $A \in \mathfrak{M}$ co dowodzi, że $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem.

$\cdot\cdot$) μ jest miarą na $\mathfrak{M}$.

Wprost z definicji μ wynika, że $\mu(\emptyset) = 0$. Natomiast jeśli $\{A^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych w $\mathfrak{M}$, to

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i \cap J_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_k(A^i \cap J_k) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(A^i \cap J_k) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A^i).$$

$\cdot\cdot\cdot$) μ jest borelowska.

Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór otwarty $U \subseteq G$ należy do $\mathfrak{M}$. Pokażemy najpierw, że dla dowolnych $x \in G$ i $r \in (0,\infty)$ kula $B(x,r) \in \mathfrak{M}$. Ponieważ

$$B(x,r) = \bigcup_{k=0}^{\infty} B(x,r) \cap J_k = \bigcup_{\{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}: B(x,r)\cap J_k \neq \emptyset\}} B(x,r) \cap J_k,$$

więc wystarczy pokazać, że jeśli $B(x,r) \cap J_k \neq \emptyset$, to $B(x,r) \cap J_k \in \mathfrak{M}_k$. Ustalmy więc takie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Rozważmy dwa przypadki.

Jeśli $k = 0$, to wtedy $J_0 = I$. Ustalmy dowolne $t \in f_0^{-1}(B(x,r) \cap J_0) \subseteq (0, 1/4)$. Wówczas $y = (t, 0, 0, \dots) \in B(x,r) \cap J_0$. Niech $\varepsilon = \min\{r - d(x,y), t, 1/4 - t\}$. Na mocy nierówności trójkąta oraz definicji ε, zachodzi inkluzja

$$O_{t,\varepsilon} := \{(s, 0, 0, \dots) : s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\} \subseteq B(x,r) \cap J_0.$$

Stąd

$$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) = f_0^{-1}(O_{t,\varepsilon}) \subseteq f_0^{-1}(B(x,r) \cap J_0).$$

Z dowolności t wynika, że zbiór $f_0^{-1}(B(x,r) \cap J_0)$ jest otwarty, więc w szczególności jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Zatem $B(x,r) \cap J_0 \in \mathfrak{M}_0$.

Dla $k \geq 1$ dowód jest analogiczny. Niech $J_k = I_{b_k}$, gdzie $b_k = (d_1, \dots, d_n) \in D^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolne $t \in f_k^{-1}(B(x,r) \cap J_k) \subseteq (0, 2^{-n-2})$. Wtedy $y = (d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, t, 0, 0, \dots) \in B(x,r) \cap J_k$. Niech teraz

$$\varepsilon = \min\{r - d(x,y), t, 2^{-n-2} - t\}.$$

Tak jak w przypadku $k = 0$, zachodzi inkluzja

$$O_{t,\varepsilon} := \{(d_1, d_2/2, \dots, d_n/2^{n-1}, s, 0, 0, \dots) : s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\} \subseteq B(x,r) \cap J_k$$

i stąd

$$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) = f_k^{-1}(O_{t,\varepsilon}) \subseteq f_k^{-1}(B(x,r) \cap J_k),$$

co pokazuje, że zbiór $f_k^{-1}(B(x,r)\cap J_k) \in L_k$, zatem $B(x,r)\cap J_k \in \mathfrak{M}_k$. Pokazaliśmy więc, że dowolna kula $B(x,r) \in \mathfrak{M}$. Ponieważ (G,d) jest ośrodkowa[10], stąd wynika, że dowolny zbiór otwarty $U \in \mathfrak{M}$. Zatem $\mathcal{B}(X,d) \subseteq \mathfrak{M}$.

Krok piąty: Całkowalność miary μ.

Pokażemy teraz, że μ jest całkowalna. Możemy założyć, że $r \in (0,1/4)$. Niech $x = (t,0,0,\dots) \in J_0$. Wtedy

$$B(x,r)\cap J_0 = \Big\{(y,0,0,\dots) : \max\{0,t-r\} < y < \min\{1/4,t+r\}\Big\}.$$

Ponieważ zachodzi

$$\min\{1/4,t+r\} - \max\{0,t-r\} \geq r,$$

więc stąd mamy

$$\mu(B(x,r)\cap J_0) = \int\limits_{\max\{0,t-r\}}^{\min\{1/4,t+r\}} \exp(-y^2)dy \geq r\exp(-1/16).$$

Zatem

$$\int_{J_0} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\,d\mu(x) \leq \exp(1/16)/r. \tag{3.5.5}$$

Niech teraz $k \geq 1$ i $x \in J_k = I_{b_k}$, gdzie $b_k = (d_1,\dots,d_n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Z definicji G mamy, że $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i = d_i/2^{i-1}$ dla $i = 1,\dots,n$, $x_{n+1} = t$ dla pewnego $t \in (0,a_k)$, $a_k = 2^{-n-2}$ oraz dla $i \geq n+2$ mamy $x_i = 0$.

Istnieje skończony, rosnący ciąg nieujemnych liczb całkowitych $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n$ taki, że $i_0 = 0$, $i_n = k$ oraz dla wszystkich $1 \leq j \leq n$ $(d_1,\dots,d_j) = b_{i_j}$.

Jeśli $t \geq r/2$, to

$$\mu(B(x,r)\cap J_k) \geq \int_{t-r/2}^{t-r/4} \exp(-(y+k)^2)\,dy \geq r/4\exp(-(t-r/4+k)^2).$$

Natomiast jeśli $t < r/2$, to rozważamy

$$L = \min\{j \in \{0,1,\dots,n\} : B(x,r)\cap J_{i_j} \neq \emptyset\}.$$

Ponieważ $t < r/2$, więc $L < n$. Niech $\tilde{x} = (x_1,\dots,x_{L+1},0,0,\dots) \in J_{i_L}$. Rozważamy dwa przypadki.

[10]Ośrodkowość wynika na przykład z faktu, że na (G,d) zadaliśmy niezdegenerowaną miarę.

Pierwszy przypadek: Załóżmy, że $d(x,\tilde{x}) \geq r/2$. Dla $j \leq L+1$ mamy $\tilde{x}_j = x_j$. Natomiast jeśli $j > L+2$, to wtedy $\tilde{x}_j = 0$. Zatem

$$d(x,\tilde{x}) = \sum_{j=L+2}^{n+1} x_j = \sum_{j=L+1}^{n} x_{j+1}.$$

Korzystając z monotoniczności funkcji $y \mapsto \exp(-y^2)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu\left(B(x,r) \cap \bigcup_{j=L+1}^{n} J_{i_j}\right) &\geq \sum_{j=L+1}^{n} \int_0^{x_{j+1}} \exp(-(y+i_j)^2)\, dy \\
&= \sum_{j=L+1}^{n} \int_{i_j}^{i_j+x_{j+1}} \exp(-y^2)\, dy \\
&\geq \int_{k-\sum_{j=L+1}^{n-1} x_{j+1}}^{k+t} \exp(-y^2) dy \\
&= \int_{t-\sum_{j=L+1}^{n} x_{j+1}}^{t} \exp(-(y+k)^2) dy \\
&\geq \int_{t-r/2}^{t-r/4} \exp(-(y+k)^2) dy.
\end{aligned}$$

Drugi przypadek: Załóżmy, że $d(x,\tilde{x}) < r/2$. Z nierówności trójkąta mamy

$$B(\tilde{x}, r/2) \subseteq B(x,r).$$

Jeśli $L = 0$, to oznacza, że znajdziemy „odcinek” zawarty w $B(\tilde{x}, r/2) \cap J_0$ o długości $r/2$. Niezależnie w jaki sposób ten odcinek jest zawarty w J_0, z monotoniczności $y \mapsto \exp(-y^2)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(\tilde{x}, r/2) \cap J_0) &\geq \int_{x_1}^{x_1+r/2} \exp(-y^2)\, dy \\
&= \int_{t-r/2}^{t} \exp(-(z + x_1 - t + r/2)^2) dz \\
&\geq \int_{t-r/2}^{t-r/4} \exp(-(z+k)^2) dz,
\end{aligned}$$

gdzie ostania nierówność zachodzi, ponieważ $x_1 - t + r/2 < 1 \leq k$.

Natomiast jeśli $L \geq 1$, to z minimalności L wynika

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(\tilde{x}, r/2) \cap J_{i_L}) &\geq \int_{x_{L+1}-r/2}^{x_{L+1}} \exp(-(y+i_L)^2)\, dy \\
&= \int_{t-r/2}^{t} \exp(-(z + x_{L+1} - t + i_L)^2) dz \\
&\geq \int_{t-r/2}^{t-r/4} \exp(-(z+k)^2) dz,
\end{aligned}$$

ponieważ $x_{L+1} - t < 1$ oraz $i_L \leq k-1$.

Zauważmy, że we wszystkich powyższych przypadkach dla $k \geq 1$ otrzymaliśmy nierówność

$$\mu(B(x,r)) \geq \int_{t-r/2}^{t-r/4} \exp(-(y+k)^2)\,dy \geq r/4 \exp(-(t-r/4+k)^2).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\,d\mu(x) &\leq 4/r \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{a_k} \exp((t-r/4+k)^2) \cdot \exp(-(t+k)^2)dt \\
&= 4/r \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{a_k} (\exp(-(t+k)r/2 + r^2/16)dt \\
&\leq 4/r \exp(r^2/16) \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+a_k} \exp(-ry/2)dy \\
&\leq 8/r^2 \exp(r^2/16) \int_{r/2}^{\infty} \exp(-z)dz \\
&= 8/r^2 \exp(r^2/16 - r/2) < \infty.
\end{aligned}$$

Łącząc powyższe oszacowanie z (3.5.5) oraz faktem, że $G = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$ wnioskujemy, że μ jest całkowalna. Zwartość zanurzeń wynika natychmiast z uwagi 105. $\square$

Bibliografia

[1] R. A. Adams i J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2003.

[2] J. M. Aldaz. “Boundedness of averaging operators on geometrically doubling metric spaces”. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica* 44.1 (2019), s. 497–503.

[3] F. J. Almgren i E. H. Lieb. “Symmetric Decreasing Rearrangement Is Sometimes Continuous”. *Journal of the American Mathematical Society* 2.4 (1989), s. 683–773.

[4] R. Alvarado, P. Górka i P. Hajłasz. “Sobolev embedding for $M^{1,p}$ spaces is equivalent to a lower bound of the measure”. *Journal of Functional Analysis* 279.7 (2020), s. 108628.

[5] R. Alvarado, P. Górka i A. Słabuszewski. “Borel regularity is equivalent to Lusin’s Theorem”. *W przygotowaniu* (2023).

[6] R. Alvarado, P. Górka i A. Słabuszewski. “Compact embeddings of Sobolev, Besov, and Triebel–Lizorkin spaces”. *Złożona do recenzji* (2023), s. 49.

[7] R. Alvarado, F. Wang, D. Yang i W. Yuan. “Pointwise characterization of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type” (2022). arXiv: 2201.10196.

[8] R. Alvarado, D. Yang i W. Yuan. “A measure characterization of embedding and extension domains for Sobolev, Triebel–Lizorkin, and Besov spaces on spaces of homogeneous type”. *Journal of Functional Analysis* 283.12 (2022), s. 109687.

[9] R. Alvarado, D. Yang i W. Yuan. “Optimal Embeddings for Triebel-Lizorkin and Besov Spaces on Quasi-Metric Measure Spaces” (2022). arXiv: 2202.06389.

[10] L. Ambrosio i P. Tilli. *Topics on Analysis in Metric Spaces*. T. 25. Oxford Lecture Mathematics and its Applications. Oxford University Press, 2004.

[11] N. Aronszajn. "Boundary values of functions with finite Dirichlet integral". *A Technical Report of the University of Kansas* 14 (1955), s. 77–94.

[12] A. Baalal i M. Berghout. "Density properties for fractional Sobolev spaces with variable exponents". *Annals of Functional Analysis* 10.3 (2019), s. 308–324.

[13] A. Baalal, M. Berghout i E.-H. Ouali. "On the Continuous embeddings between the fractional Hajłasz-Orlicz-Sobolev spaces" (2023). arXiv: 2305.00878.

[14] H. Bahouri, J. Chemin i R. Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[15] R. Bandaliyev i P. Górka. "Relatively compact sets in variable-exponent Lebesgue spaces". *Banach Journal of Mathematical Analysis* 12.2 (2018), s. 331–346.

[16] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1999.

[17] A. Birkholc. *Analiza matematyczna: funkcje wielu zmiennych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.

[18] A. Björn, J. Björn i N. Shanmugalingam. "Extension and trace results for doubling metric measure spaces and their hyperbolic fillings". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 159 (2022), s. 196–249.

[19] J. Björn i A. Kałamajska. "Poincaré inequalities and compact embeddings from Sobolev type spaces into weighted L^q spaces on metric spaces". *Journal of Functional Analysis* 282.11 (2022), s. 109421.

[20] V. Bogachev. *Measure Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[21] M. Bourdon i H. Pajot. "Cohomologie ℓ_p espaces de Besov". *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik* 558 (2003), s. 85–108.

[22] J. Bourgain, H. Brezis i P. Mironescu. "Another look at Sobolev spaces". *Optimal control and partial differential equations*. IOS Press, 2001, s. 439–455.

[23] H. Brezis, J. Van Schaftingen i P.-L. Yung. “A surprising formula for Sobolev norms”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.8 (2021), e2025254118.

[24] H. Brezis, J. Van Schaftingen i P.-L. Yung. “Going to Lorentz when fractional Sobolev, Gagliardo and Nirenberg estimates fail”. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 60.4 (2021), s. 129.

[25] H. Brézis. “How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces”. *Russian Mathematical Surveys* 57.4 (2002), s. 693–708.

[26] C. Butler. “Extension and trace theorems for noncompact doubling spaces” (2020). arXiv: `2009.10168`.

[27] J. Cheeger. “Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces”. *Geometric and Functional Analysis. GAFA* 9.3 (1999), s. 428–517.

[28] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher i E. Grenier. *Mathematical Geophysics: An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*. Oxford University Press, 2006.

[29] R. Coifman i G. Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*. Springer Berlin Heidelberg, 1971.

[30] A. Cotsiolis i N. K. Tavoularis. “Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 295.1 (2004), s. 225–236.

[31] E. Di Nezza, G. Palatucci i E. Valdinoci. “Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces”. *Bulletin des Sciences mathématiques* 136.5 (2012), s. 521–573.

[32] S. Dipierro i E. Valdinoci. “A density property for fractional weighted Sobolev spaces”. *Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni* 26.4 (2015), s. 397–422.

[33] O. Domínguez i M. Milman. “Bourgain–Brezis–Mironescu–Maz’ya–Shaposhnikova limit formulae for fractional Sobolev spaces via interpolation and extrapolation”. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 62.2 (2023), s. 43.

[34] M. Dybowski i P. Górka. “The axiom of choice in metric measure spaces and maximal δ-separated sets”. *Archive for Mathematical Logic* 62.5 (2023), s. 735–749.

[35] B. Dyda. “Embedding theorems for Lipschitz and Lorentz spaces on lower Ahlfors regular sets”. *Studia Mathematica* 197.3 (2010), s. 247–256.

[36] B. Dyda i M. Kijaczko. “On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces”. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 201.4 (2022), s. 1855–1867.

[37] B. Dyda i M. Kijaczko. “On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces”. *Nonlinear Analysis* 205 (2021), s. 112231.

[38] S. Eriksson-Bique, G. Giovannardi, R. Korte, N. Shanmugalingam i G. Speight. “Regularity of solutions to the fractional Cheeger-Laplacian on domains in metric spaces of bounded geometry”. *Journal of Differential Equations* 306 (2022), s. 590–632.

[39] L. C. Evans i R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Textbooks in Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.

[40] H. Federer. *Geometric Measure Theory.* Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[41] A. Fiscella, R. Servadei i E. Valdinoci. “Density properties for fractional Sobolev spaces”. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica* 40.1 (2015), s. 235–253.

[42] G. B. Folland. *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, 1999.

[43] N. Fujii. “A condition for a two-weight norm inequality for singular integral operators”. *Studia Mathematica* 98.3 (1991), s. 175–190.

[44] E. Gagliardo. “Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili”. *Ricerche di Matematica* 7 (1958), s. 102–137.

[45] D. Gilbarg i N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[46] A. Gogatishvili, P. Koskela i N. Shanmugalingam. “Interpolation properties of Besov spaces defined on metric spaces”. *Mathematische Nachrichten* 283.2 (2010), s. 215–231.

[47] A. Gogatishvili, P. Koskela i Y. Zhou. “Characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces on metric measure spaces”. 25.4 (2013), s. 787–819.

[48] P. Gorka. “Looking for compactness in Sobolev spaces on noncompact metric spaces”. *Annales Fennici Mathematici* 43.1 (2018), s. 531–540.

[49] P. Górka. “Campanato theorem on metric measure spaces”. *Annales Fennici Mathematici* 34.2 (2009), s. 523–528.

[50] P. Górka. “Separability of a Metric Space Is Equivalent to the Existence of a Borel Measure”. *The American Mathematical Monthly* 128.1 (2020), s. 84–86.

[51] P. Górka i A. Słabuszewski. “Embedding of fractional Sobolev spaces is equivalent to regularity of the measure”. *Studia Mathematica* 268.3 (2023), s. 333–343.

[52] P. Górka i A. Słabuszewski. “Embeddings of the fractional Sobolev spaces on metric-measure spaces”. *Nonlinear Analysis* 221 (2022), s. 112867.

[53] P. Hajlasz. “Sobolev spaces on metric-measure spaces. Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces”. *Contemporary Mathematics* 338 (2003), s. 173–218.

[54] P. Hajłasz. “Sobolev spaces on an arbitrary metric space”. *Potential Analysis* 5.4 (1996), s. 403–415.

[55] P. Hajłasz i P. Koskela. *Sobolev met poincaré*. T. 145. Memoirs of the American Mathematical Society, 2000.

[56] P. Hajłasz, P. Koskela i H. Tuominen. “Measure density and extendability of Sobolev functions”. *Revista Matemática Iberoamericana* 24.2 (2008), s. 645–669.

[57] P. Hajłasz, P. Koskela i H. Tuominen. “Sobolev embeddings, extensions and measure density condition”. *Journal of Functional Analysis* 254.5 (2008), s. 1217–1234.

[58] P. Hajłasz i Z. Liu. “A compact embedding of a Sobolev space is equivalent to an embedding into a better space”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 138.9 (2010), s. 3257–3266.

[59] E. H. Hanson. “A note on compactness”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (1933), s. 397–400.

[60] E. Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[61] T. Heikkinen. “Generalized Lebesgue points for Hajłasz functions”. *Journal of Function Spaces* 2018 (2018), s. 12.

[62] T. Heikkinen, P. Koskela i H. Tuominen. “Approximation and quasicontinuity of Besov and Triebel-Lizorkin functions”. *Transactions of the American Mathematical Society* 369.5 (2017), s. 3547–3573.

[63] T. Heikkinen i H. Tuominen. “Approximation by Hölder functions in Besov and Triebel–Lizorkin spaces”. *Constructive Approximation* 44.3 (2016), s. 455–482.

[64] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam i J. Tyson. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2015.

[65] J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Springer Science & Business Media, 2001.

[66] J. Heinonen i P. Koskela. “Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry”. *Acta Mathematica* 181.1 (1998), s. 1–61.

[67] T. Husain. *Topology and Maps*. International Scholars Forum. Springer US, 1977.

[68] R. Ignat. “On an open problem about how to recognize constant functions”. *Houston Journal of Mathematics* 31.1 (2005), s. 285–304.

[69] I. A. Ivanishko i V. G. Krotov. “Compactness of embeddings of Sobolev type on metric measure spaces”. *Mathematical Notes* 86.5 (2009), s. 775–788.

[70] A. Jonsson i H. Wallin. “A Whitney extension theorem in L^p and Besov spaces”. 28.1 (1978), s. 139–192.

[71] A. Kałamajska. “On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces”. *Annales Academiae scientiarum Fennicae. Mathematica* 24.1 (1999), s. 123–132.

[72] N. Karak. “Lower bound of measure and embeddings of Sobolev, Besov and Triebel–Lizorkin spaces”. *Mathematische Nachrichten* 293.1 (2020), s. 120–128.

[73] N. Karak. “Measure density and embeddings of Hajłasz-Besov and Hajłasz-Triebel-Lizorkin spaces”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 475.1 (2019), s. 966–984.

[74] N. J. Korevaar i R. M. Schoen. “Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets”. *Communications in Analysis and Geometry* 1.4 (1993), s. 561–659.

[75] L. Korobenko, D. Maldonado i C. Rios. “From Sobolev inequality to doubling”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 143.9 (2015), s. 4017–4028.

[76] P. Koskela i P. MacManus. “Quasiconformal mappings and Sobolev spaces”. *Studia Mathematica* 131.1 (1998), s. 1–17.

[77] P. Koskela i Z. Wang. “Dyadic norm Besov-type spaces as trace spaces on regular trees”. *Potential Analysis* 53.4 (2020), s. 1317–1346.

[78] P. Koskela, D. Yang i Y. Zhou. “Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings”. *Advances in Mathematics* 226.4 (2011), s. 3579–3621.

[79] V. G. Krotov. “Criteria for compactness in L^p, $p \geq 0$”. *Sbornik: Mathematics* 203.7 (2012), s. 129–148.

[80] G. Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2017.

[81] D. Li i K. Wang. “Symmetric radial decreasing rearrangement can increase the fractional Gagliardo norm in domains”. *Communications in Contemporary Mathematics* 21.07 (2019), s. 1850059.

[82] J. Lindquist i N. Shanmugalingam. “Traces and extensions of certain weighted Sobolev spaces on $\mathbb{R}^n$ and Besov functions on Ahlfors regular compact subsets of $\mathbb{R}^n$”. *Complex Analysis and its Synergies* 7.1 (2021), s. 1–12.

[83] H. Luiro i A. V. Vähäkangas. “Local maximal operators on fractional Sobolev spaces”. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 68.3 (2016), s. 1357–1368.

[84] J. Luukkainen i E. Saksman. “Every complete doubling metric space carries a doubling measure”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 126.2 (1998), s. 531–534.

[85] R. A. Macías i C. Segovia. “Lipschitz functions on spaces of homogeneous type”. *Advances in Mathematics* 33.3 (1979), s. 257–270.

[86] L. Malý. “Trace and extension theorems for Sobolev-type functions in metric spaces” (2017). arXiv: 1704.06344.

[87] V. Maz’ya i T. Shaposhnikova. “On the Bourgain, Brezis, and Mironescu Theorem Concerning Limiting Embeddings of Fractional Sobolev Spaces”. *Journal of Functional Analysis* 195.2 (2002), s. 230–238.

[88] D. Mitrea, I. Mitrea, M. Mitrea i S. Monniaux. *Groupoid Metrization Theory: With Applications to Analysis on Quasi-Metric Spaces and Functional Analysis*. Springer, 2012.

[89] J. R. Munkres. *Topology*. 2nd ed. Pearson Education International, 2000.

[90] V. Munnier. “Integral energy characterization of Hajłasz–Sobolev spaces”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 425.1 (2015), s. 381–406.

[91] G. Palatucci, O. Savin i E. Valdinoci. “Local and global minimizers for a variational energy involving a fractional norm”. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 192.4 (2013), s. 673–718.

[92] K. Pietruska-Pałuba. “Heat kernels on metric spaces and a characterisation of constant functions”. *manuscripta mathematica* 115.3 (2004), s. 389–399.

[93] M. M. Rao i Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker New York, 1991.

[94] K. Ryszewska. “A space-fractional Stefan problem”. *Nonlinear Analysis* 199 (2020), s. 112027.

[95] N. Shanmugalingam. “Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces”. *Revista Matemática Iberoamericana* 16.2 (2000), s. 243–279.

[96] P. Shvartsman. “On extensions of Sobolev functions defined on regular subsets of metric measure spaces”. *Journal of Approximation Theory* 144.2 (2007), s. 139–161.

[97] W. Sierpiński. “Sur les fonctions d’ensemble additives et continues”. *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922), s. 240–246.

[98] T. Sjödin. “A new approach to Sobolev spaces in metric measure spaces”. *Nonlinear Analysis* 142 (2016), s. 194–237.

[99] L. N. Slobodeckij. “Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equations”. *Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap* 197 (1958), s. 54–112.

[100] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970.

[101] J. O. Strömberg. “Bounded Mean Oscillation with Orlicz Norms and Duality of Hardy Spaces”. *Indiana University Mathematics Journal* 28.3 (1979), s. 511–544.

[102] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser, 1983.

[103] H. Triebel. “Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers”. *Revista Matemática Complutense* 15.2 (2002), s. 475–524.

[104] A. L. Volberg i S. V. Konyagin. “On measures with the doubling condition”. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 51.3 (1987), s. 666–675.

[105] Z. Wang. “Characterization of trace spaces on regular trees via dyadic norms”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 494.2 (2021), s. 124646.

[106] D. Yang. “New characterizations of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces”. *Science in China Series A: Mathematics* 46 (2003), s. 675–689.

[107] X. Zhou. “Sobolev functions in the critical case are uniformly continuous in s-Ahlfors regular metric spaces when $s \leq 1$”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 145.1 (2017), s. 267–272.

[108] Y. Zhou. “Fractional Sobolev extension and imbedding”. *Transactions of the American Mathematical Society* 367.2 (2015), s. 959–979.